# Chapitre 12

# Travail et Énergie cinétique

Comme déjà vu dans les chapitres 0, 8, 9, 10, la mécanique est le domaine de la physique qui étudie le mouvement d'un système dans un référentiel donné. Ces chapitres précédents proposent une approche de la mécanique basée sur l'étude des forces et interactions subies par le système pour le mettre en mouvement.
Dans les deux chapitres qui suivent, il est question d'étudier la mécanique selon une approche énergétique. On s'attachera ici à définir l'énergie cinétique et le travail des forces, ainsi que le théorème de l'énergie cinétique.

## 12.1 Travail d'une force constante

### 12.1.1 Définition et propriétés

#### Définition

Le travail d'une force correspond à l'énergie fournie ou retirée au système par cette force au cours de son mouvement. Cette grandeur s'exprime en Joule. Elle peut être négative, positive ou nulle selon comment la force contribue, d'un point de vue énergétique, au mouvement du système.
On se limitera dans ce chapitre à donner l'expression du travail pour une **force constante** (c'est-à-dire un **vecteur constant : même direction, même sens et même norme tout au long du mouvement**). La formule générale n'est pas abordée au lycée. En revanche, pour une force constante, il est important de noter que le résultat du travail entre un point $A$ et un point $B$ **ne dépend pas du chemin suivi entre les deux points**.

**Travail d'une force constante**

Lorsqu'un système se déplace d'un point $A$ à un point $B$, le travail $W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right)$ d'une force constante $\overrightarrow{F}$ sur ce trajet est donné par la relation suivante :

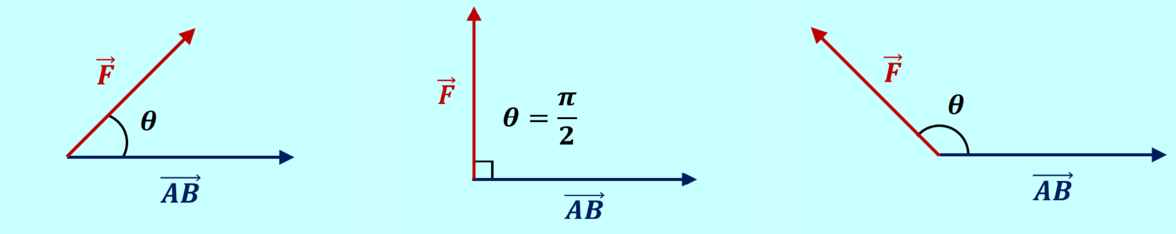
$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(\theta)$$

$W$ le travail (en J)
$F$ la norme de la force constante (en N)
$AB$ la longueur du segment $[AB]$ (en m)
$\theta = \left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{AB}\right)$ (en ° ou rad)

#### Travail moteur, nul ou résistant

D'un point de vue purement mathématique, puisque le travail d'une force constante est un produit scalaire, son signe va dépendre de l'angle $\theta$ entre le vecteur force $\overrightarrow{F}$ et le vecteur chemin $\overrightarrow{AB}$.
D'un point de vue physique, si le travail est négatif, cela signifie que la force contribue à freiner le mouvement du système. On parle alors de **travail résistant**. Si le travail est positif, la force contribue plutôt à accélérer le mouvement du système et on parle de **travail moteur**. Enfin si le travail est nul, la force a une contribution nulle au mouvement d'un point de vue énergétique, on dit qu'elle ne travaille pas.

**Propriétés du travail d'une force**




| | | |
|---|---|---|
| $\theta \in \left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$ | $\theta = \frac{\pi}{2}$ | $\theta \in \left]\frac{\pi}{2} \,;\, \pi\right]$ |
| $\cos(\theta) > 0$ | $\cos(\theta) = 0$ | $\cos(\theta) < 0$ |
| $W > 0$ | $W = 0$ | $W < 0$ |
| Travail Moteur | Travail nul | Travail résistant |

### 12.1.2 Exemples de certaines forces

On s'intéresse au mouvement d'un objet sur pan incliné $ABCD$, subissant son poids $\vec{P}$, la réaction du support $\vec{R}$ et des frottements $\vec{f}$. L'étude se fait dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

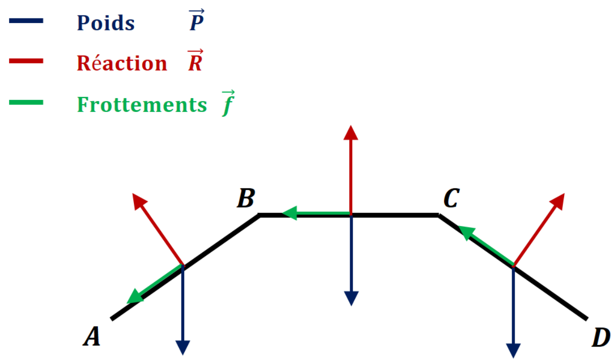



**Figure 12.1** – Schéma représentant le poids, les frottements et la réaction du support en trois points d'un pan incliné, délimité par les sections AB, BC et CD

#### Travail du poids

| Trajet AB | Trajet BC | Trajet CD |
|---|---|---|
| $\theta \in \left]\frac{\pi}{2} \,;\, \pi\right]$ | $\theta = \frac{\pi}{2}$ | $\theta \in \left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$ |
| $W < 0$ | $W = 0$ | $W > 0$ |
| Travail résistant | Travail nul | Travail moteur |

#### Forces ne travaillant pas

En ce qui concerne la réaction du support $\overrightarrow{R}$, cette force est **toujours orthogonale au chemin suivi**.
Ainsi on aura toujours $\left(\overrightarrow{R}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
Donc $W_{AB}\left(\overrightarrow{R}\right) = 0$. La réaction du support est une force qui ne travaille pas, quel que soit le mouvement étudié.

**Remarque** : C'est la même situation pour la tension d'un fil au bout duquel on suspend une masse pour faire un pendule.

#### Travail des forces de frottements

Par définition, les forces de frottements s'opposent au mouvement du système. On constate ainsi que quel que soit le chemin $AB$ suivi, on a **toujours $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires de sens contraire**.
Donc $\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{AB} < 0$, donc $W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) < 0$. Les forces de frottements ont toujours un travail résistant.

## 12.2 Théorème de l'énergie cinétique

### 12.2.1 Énergie cinétique

Lorsqu'un système est en mouvement dans un référentiel donné, il possède une énergie dite cinétique qui dépend de sa masse $m$ et de sa vitesse $v$. Cette grandeur ne peut être que positive ou nulle.

**Énergie cinétique**

L'énergie cinétique d'un système assimilé à un point matériel $M$ est définie par la relation suivante :

$$E_c\left(M\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$E_c$ l'énergie cinétique (en J)
$m$ la masse du système (en kg)
$v$ la norme du vecteur vitesse du système (en m.s$^{-1}$).

### 12.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

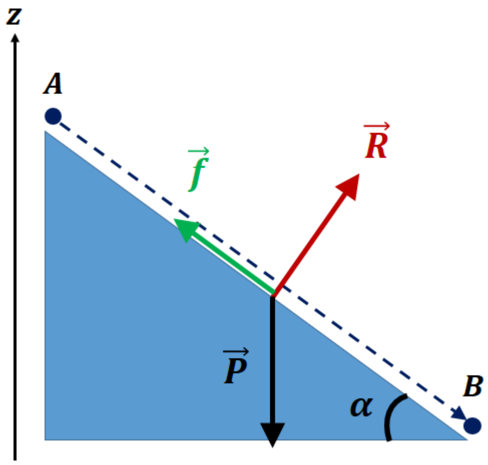
En mécanique, ce sont les forces exercées sur le système qui sont responsables de son mouvements. Or la mise en mouvement engendre potentiellement des variations de vitesses, et donc d'énergie cinétique. Ainsi la variation d'énergie cinétique d'un système est reliée aux travaux des forces (qui expriment justement l'action des forces d'un point de vue énergétique).

**Théorème de l'énergie cinétique**

La variation d'énergie cinétique d'un système sur un trajet $AB$ dans un référentiel donné, est égale à la somme des travaux des forces extérieures qui s'appliquent sur le système au cours de son mouvement :

$$\Delta E_c = E_c\left(B\right) - E_c\left(A\right) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right)$$

## 12.3 Exercice type




On considère un objet de masse $m = 50$ kg glissant avec frottements sur un pan incliné d'angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. Il part sans vitesse initiale du point $A$ situé à une hauteur $h = z_A - z_B = 10$ m. On prendra $g = 10$ N.kg$^{-1}$
On se propose ici de résoudre deux variantes de cet exercice à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

### 12.3.1 Calcul des frottements $f$ connaissant la vitesse $v_B$ au point $B$

On suppose dans cette question que la valeur de la vitesse au point B est $v_B = 10$ m.s$^{-1}$. Calculer l'intensité $f$ de la force de frottement $\vec{f}$ sur le trajet $AB$.

On étudie le système de masse $m$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
La variation d'énergie cinétique du système entre le point $A$ et le point $B$ vaut :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Or $v_A = 0$ m.s$^{-1}$. Ainsi $\Delta E_c = \dfrac{1}{2} \times 50 \times 10^2 = 2500$ J.

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W_{AB}\left(\vec{F}\right)$$

On calcule alors le travail du poids :

$$\begin{aligned}
W_{AB}\left(\vec{P}\right) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{AB} &= mg \times AB \times \cos\left(\vec{P};\overrightarrow{AB}\right)\\
&= mg \times AB \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\\
&= mg \times AB \times \sin(\alpha)\\
&= mg \times AB \times \frac{h}{AB}\\
&= mgh\\
&= 50 \times 10 \times 10\\
&= 5000 \text{ J}
\end{aligned}$$

Le travail de la réaction du support $\vec{R}$ est nul sur le trajet $AB$ car cette force est orthogonale à $\overrightarrow{AB}$.

Le travail de la force de frottement vaut :

$$\begin{aligned} W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) &= f \times AB \times \cos\left(\overrightarrow{f}\,;\overrightarrow{AB}\right) \\ &= f \times AB \times \cos(\pi) \\ &= -f \times AB \end{aligned}$$

Ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= W_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right) + W_{AB}\left(\overrightarrow{R}\right) + W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) \\ \Delta E_c &= mgh + 0 - f \times AB \end{aligned}$$

D'où la force de frottement $f = \dfrac{mgh - \Delta E_c}{AB}$ avec $AB = \dfrac{h}{\sin(\alpha)} = \dfrac{10}{\sin(30)} = 20$ m soit donc :

$$f = \frac{5000 - 2500}{20} = 125 \text{ J}$$

### 12.3.2 Calcul de la vitesse $v_B$ au point $B$ connaissant la force de frottement $f$

On suppose ici que la norme du vecteur force de frottement vaut $f = 125$ J. En reprenant le même raisonnement que dans la question précédente, on obtient grâce au théorème de l'énergie cinétique que :

$$\begin{aligned} \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 &= W_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right) + W_{AB}\left(\overrightarrow{R}\right) + W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) \\ \iff \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 &= mgh + 0 - f \times AB \\ \iff v_B^2 &= 2gh - \frac{2f \times AB}{m} \\ \iff v_B &= \sqrt{2gh - \frac{2f \times AB}{m}} \\ \iff v_B &= \sqrt{2 \times 10 \times 10 - \frac{2 \times 125 \times 20}{50}} \\ \iff v_B &= 10 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$