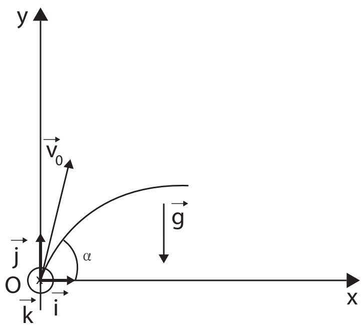
Chapitre 02 Mouvement dans un champ uniforme

J'APPRENDS

1. Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme

1.1. Lancer d'un projectile



Un projectile est lancé à l'instant t = 0 avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale.

On assimile le projectile à un point matériel ce qui nous permet de le réduire au mouvement de son centre d'inertie M.

L'étude est réalisée avec les approximations suivantes :

- On considère que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme,
- On néglige la poussée d'Archimède et les frottements par rapport au poids du système.

On étudie le mouvement du projectile dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen avec une bonne approximation, muni d'un repère cartésien (Oxyz).

Le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) qui contient les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$. O est la position initiale du projectile M.

Dans ce système d'axes, les coordonnées du vecteur vitesse initiale sont :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$$

Le référentiel, le repère et le système étant déjà définis, on va faire le bilan des forces qui s'exercent sur le système et on va énoncer la loi que l'on va appliquer.

1.2. Bilan des forces et application de la deuxième loi de Newton

Le projectile est soumis à une seule force, son poids. On dit dans ce cas que le projectile est en chute libre.
Les caractéristiques du poids sont :
$\vec{P}=m\vec{g}$, force verticale et dirigée vers le bas, de valeur constante puisque la masse m du solide est constante et le vecteur $\vec{g}$ est constant car on a supposé le champ de pesanteur uniforme.

La deuxième loi de Newton (relation fondamentale de la dynamique) s'écrit $\sum\vec{F}=m\vec{a}$
or $\sum\vec{F}=\vec{P}$ et $\vec{P}=m\vec{g}$ ce qui donne $m\,\vec{a}\ = m\,\vec{g}$ soit $\vec{a}\ =\ \vec{g}$.
L'accélération d'un système en chute libre est égale au vecteur champ de pesanteur :
$\vec{a}\ =\ \vec{g}$
L'accélération, et donc le mouvement du projectile, ne dépendent pas de sa masse : deux projectiles de masses différentes en chute libre ont le même mouvement.

1.3 Vecteur vitesse instantanée

Sachant que $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ et que $\vec{g}=-g\vec{j}$, car le vecteur $\vec{g}$ et le vecteur $\vec{j}$ sont opposés,

la deuxième loi de Newton conduit, par projection sur les axes Ox et Oy, au système suivant :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x(t)=\dfrac{dv_x}{dt}(t)=0 \\ a_y(t)=\dfrac{dv_y}{dt}(t)=-g \\ a_z(t)=\dfrac{dv_z}{dt}(t)=0 \end{cases}$$

Pour obtenir les trois coordonnées du vecteur vitesse, il suffit de trouver la primitive de ces trois coordonnées par rapport au temps. Il vient

$$\vec{v}\begin{cases} v_y(t)= & & C_1 \\ v_y(t)= & -gt+ & C_2 \\ v_0= & & C_3 \end{cases}$$ où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes d'intégration.

Pour déterminer les constantes, on se place dans les conditions initiales.
À l'instant initial, $\vec{v}\,(0)=\ \vec{v}_0$ de coordonnées

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$$, ce qui conduit au système

$$\begin{cases} v_x(0) = & & v_0 \cos\alpha = C_1 \\ v_y(0) = & v_0 \sin\alpha = & -g \times 0 + C_2 \\ v_z(0) = & & 0 = C_3 \end{cases}$$ ou encore

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \cos\alpha \\ C_2 = v_0 \sin\alpha \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

De ce fait, le vecteur vitesse d'un tel projectile est donné par :

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = & & v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = & -gt + & v_0 \sin\alpha \\ v_z(t) = & & 0 \end{cases}$$

La vitesse horizontale est constante, donc le mouvement horizontal est uniforme. Le mouvement vertical, lui, est uniformément accéléré car l'accélération verticale est constante.

1.4 Vecteur position

Sachant que $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, où le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

le système d'équations donnant les coordonnées du vecteur vitesse s'écrit également:

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \\ v_z(t) = \dfrac{dz}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont les primitives des coordonnées du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t)=(v_0\cos\alpha)t+C_4 \\ y(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\alpha)t+C_5 \\ z(t)=C_6 \end{cases}$$

où C_4, C_5 et C_6 sont des constantes
d'intégration déterminées grâce aux conditions initiales sur la position.

À l'instant initial, M est au point 0, donc ses coordonnées sont nulles :

$$\begin{cases} x(0)=0=(v_0\cos\alpha)\times 0+C_4 \\ y(0)=0=-\dfrac{1}{2}g\times 0^2+(v_0\sin\alpha)\times 0+C_5 \\ z(t)=0=C_6 \end{cases}$$

Ceci donne les constantes d'intégration $C_4 = C_5 = C_6 = 0$.

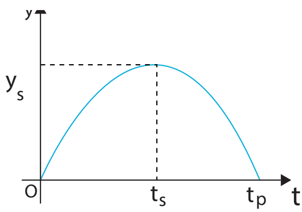
Les coordonnées du vecteur position s'écrivent finalement :

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t)=(v_0\cos\alpha)t \\ y(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\alpha)t \\ z(t)=0 \end{cases}$$

x(t), y(t) et z(t) sont les équations horaires du mouvement du projectile.

L'ordonnée y(t) du projectile est une parabole.

Puisque z = 0, le mouvement se déroule dans le plan de tir (Oxy).



1.5 Équation cartésienne de la trajectoire

Il s'agit d'exprimer y en fonction de x en éliminant le paramètre temps entre les deux équations horaires x(t) et y(t).

L'équation horaire x = ($v_0$cosa)t conduit à écrire $t=\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$

En remplaçant t par cette expression dans l'équation horaire de y, il vient :

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

L'équation cartésienne de la trajectoire est donc :

$$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$$

Il s'agit d'une parabole, dans le plan de tir, incurvée vers le bas.

1.6 Caractéristiques de la trajectoire

La flèche

C'est la distance entre le sommet de la trajectoire et l'axe des abscisses.

Le sommet est atteint lorsque $v_y(t_s)=0$ et ceci est vrai à la date $t_s = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$.
En introduisant cette expression de t_s dans y(t), il vient :

$$y_s = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0\sin\alpha\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

La flèche de la trajectoire, hauteur maximale atteinte, s'écrit :

$$y_s = \frac{1}{2}\times\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}$$

La portée

La portée est l'abscisse x_p du point P, dont l'ordonnée y_p est nulle. C'est le point du sol sur lequel arrive le projectile après sa chute.

Ceci conduit à résoudre l'équation y = 0, soit $-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x = 0$

En factorisant par x on montre qu'il existe deux solutions :

- la solution x = 0 qui correspond au point de lancer O,
- l'autre solution qui est donc x_p et qui vérifie

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_p + \tan\alpha = 0$$

Elle s'écrit ainsi : $x_p = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}$ ou encore $x_p = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$

La portée de la trajectoire s'exprime sous la forme :

$$x_p = \frac{2v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$$

Elle croit avec v_0^2 et avec $\sin(2\alpha)$. Pour une valeur donnée de v_0, elle est maximale pour $\sin(2\alpha) = 1$ c'est-à-dire pour a = 45°.

Pour une certaine valeur de v_0, deux angles de tir complémentaires peuvent correspondre à une même portée : α_1 et $\alpha_2 = 90° - \alpha_1$

1.7 Cas particulier : chute libre verticale sans vitesse initiale

Lorsque la vitesse initiale est nulle ($v_0 = 0$), le projectile est en chute libre verticale : seul l'axe (Oy) est utile vu que l'accélération est verticale.

Cela donne :

$v_y(t) = -gt$ et $y(t) = -\frac{1}{2} gt^2$

Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.

2.1 Champ et force

On appelle champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ un champ qui a même valeur, même direction et même sens en tout point de l'espace.
Il s'obtient entre deux armatures métalliques planes, une chargée positivement, notée P et l'autre chargée négativement, notée N et séparées d'une distance d. Entre les deux plaques on applique une tension U_{PN}. Le vecteur champ $\vec{E}$ est orthogonal aux armatures, et orienté de l'armature du plus haut potentiel vers celle de plus bas potentiel.

La valeur du champ électrostatique est : $E = \frac{U_{PN}}{d}$
avec E en $V.m^{-1}$, d en m et U_{PN} en V.

Une particule chargée de charge électrique q dans un champ électrostatique $\vec{E}$ subit une force électrique $\vec{F}$ telle que :

$\vec{F} = q\vec{E}$
avec F en N, q en C et E en $V.m^{-1}$.

Les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires car il existe un réel q tel que $\vec{F} = q\vec{E}$
- Si $q > 0$, alors $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont dans le même sens.
- Si $q < 0$, alors $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont dans des sens opposés.
- Si $q = 0$, alors la force électrique est nulle.

2.2 Accélération d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

Une particule chargée de masse m et de charge électrique q dans un champ électrostatique $\vec{E}$ se trouve également dans le champ de pesanteur. Elle subit donc deux forces :

- la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$
- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

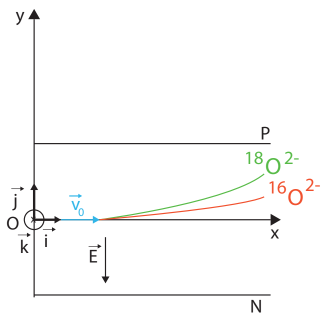
Les champs électrostatiques couramment utilisés ont des valeurs voisines de 10^4 V.m^{-1}. Si la particule étudiée est un électron, de charge électrique -e = -1,6.10^{-19} C, la force électrique a une valeur voisine de 10^{-15} N. La masse de l'électron étant m = 9,1.10^{-31} kg, l'ordre de grandeur de la valeur P = mg de son poids est 10^{-29} N.
Ainsi, la force électrique subie par l'électron est 10^{14} fois plus grande que son poids : il est donc possible de négliger l'influence du poids. Ce sera le cas quelle que soit la particule.

La deuxième loi de Newton s'écrit $\sum\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E}$ ce qui donne $\vec{a} = \dfrac{q}{m}\vec{E}$

Le vecteur accélération d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme est un vecteur constant, de même direction que la force électrique qu'elle subit.
- si q > 0, $\vec{a}$ est de même sens que $\vec{E}$
- si q < 0, $\vec{a}$ est de sens contraire à $\vec{E}$

3. Déviation d'une particule

La figure ci-dessous décrit la déviation d'un faisceau d'ions négatives pénétrant dans un champ électrostatique uniforme avec une vitesse initiale v_0 perpendiculaire au champ $\vec{E}$.



Comme la tension U_{PN} est positive car la plaque P est positive et la plaque N négative, les ions d'oxygène sont déviés en direction de l'armature P.
S'il s'agissait de particules chargées positivement, la déviation serait contraire.
Le problème est formellement identique à celui du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme : il suffit de remplacer $\vec{a}$ par $\dfrac{q\vec{E}}{m}$ et d'introduire les conditions initiales adaptées (α = 0).

Coordonnées du vecteur vitesse de la particule :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t)=v_0 \\ v_y(t)=\dfrac{qE}{m}t \\ v_z(t)=0 \end{cases}$$

Coordonnées du vecteur position :

$$\overrightarrow{OG}(t)\vec{v}(t)\begin{cases} x(t)=v_0t \\ y(t)=\dfrac{qE}{2m}t^2 \\ z(t)=0 \end{cases}$$

La trajectoire de la particule est contenue dans le plan (Oxy).
Son équation cartésienne est celle d'une parabole :

$$y=-\frac{qE}{2mv_0^2}x^2$$

Application :
Séparation d'ions isotopes

D'après la formule de l'ordonnée y ci-dessus : $y=-\dfrac{qE}{2mv_0^2}x^2$

L'ordonnée de sortie des ions, selon qu'ils appartiennent à l'isotope 16 ou à l'isotope 18 de l'oxygène, de masses respectives

$m_{16}=2,66.10^{-26}$kg et $m_{18}=2,99.10^{-26}$ kg n'est pas la même, car elle est inversement proportionnelle à l'opposé de leur masse, donc ils ne sortent pas au même endroit et par conséquent, on peut les séparer. Plus l'isotope est lourd, plus son ordonnée de sortie est grande.