Chapitre 0

Outils mathématiques

CERTAINES notions mathématiques sont requises pour aborder le programme de physique-chimie de terminale sereinement. Le but de ce chapitre introductif est de définir une partie de ces outils utiles pour de nombreux chapitres. Voici le plan qui sera suivi :

- Primitives de fonctions
- Fonctions logarithmes népérien et décimal
- Equation différentielle linéaire du premier ordre (Vidéo 1 et Vidéo 2.)

0.1 Primitives

0.1.1 Primitive d'une fonction

Soit une fonction mathématique f définir sur un intervalle réel I. Calculer une primitive de cette fonction revient à faire l'opération inverse de la dérivée. Si l'on note f' la dérivée de f, alors f est une primitive de f'.

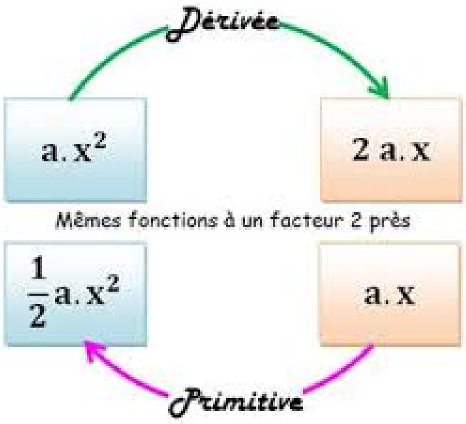

Figure 1 – La figure 1 illustre la relation qu'il y a entre la dérivée et une primitive pour une fonction usuelle simple (*Source*)

Primitive d'une fonction

On dit que $\boldsymbol{F}$ est une **primitive** de f sur un intervalle I si et seulement si F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

Les primitives d'une fonction sont toutes définies **à un constante près**. Puisque la dérivée d'une constante K est nulle, alors si F est une primitive de f, $F + K$ est aussi une primitive. La constante K est appelée constante d'intégration.

Exemple : Les chapitres 11 et 12 montrent un exemple d'application du calcul de primitive en physique : résolution des lois de Newton en mécanique pour une chute libre.

0.1.2 Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Figure 2 – Tableau résumant les principales primitives de fonctions usuelles (*Source*)

0.2 Fonctions logarithmes népérien et décimal

0.2.1 Fonction logarithme népérien

Logarithme népérien

On appelle fonction **logarithme népérien**, notée ln, la *bijection réciproque* de la fonction **exponentielle** sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, telle que pour tout $x \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$:

$$e^{\ln x} = \ln\left(e^x\right) = x$$

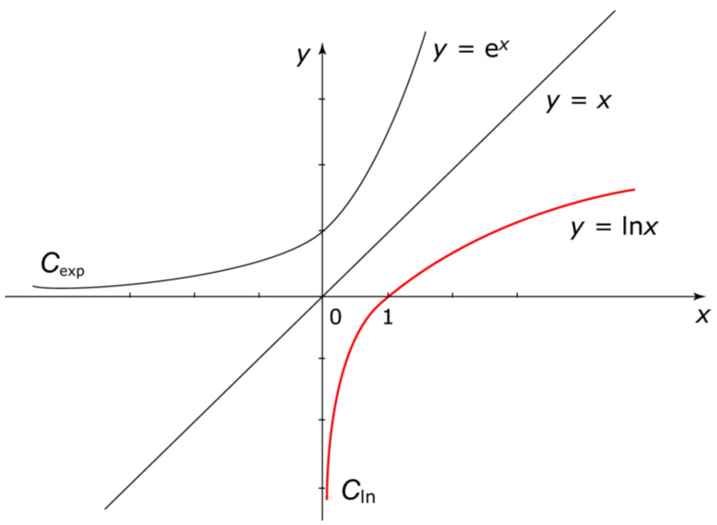

Figure 3 – Courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien (*Source*)

0.2.2 Fonction logarithme décimal

Logarithme décimal

Par analogie avec le logarithme népérien, on définit la fonction **logarithme décimal**, notée log, comme la *bijection réciproque* de la fonction « 10 puissance » sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$10^{\log x} = \log\left(10^x\right) = x$$

Exemple : Le chapitre **??** propose une première application de cette fonction dans le cadre de la définition du pH d'une solution.

$$\mathrm{pH} = -\log\left[\mathrm{H_3O^+}\right] \Longleftrightarrow \left[\mathrm{H_3O^+}\right] = 10^{-\mathrm{pH}}$$

0.2.3 Formules avec le logarithme

Que ce soit pour le logarithme népérien ou décimal, il existe quelques formules utiles :

Formules avec logarithme

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln(a^n) = n \times \ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

0.3 Équation différentielle linéaire du premier ordre

0.3.1 Définitions

Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une équation reliant une fonction f et ses dérivées successives $\dfrac{df}{dx}(x)$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$, ... , $\dfrac{d^{(n)}f}{dx^n(x)}$.

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** est une équation reliant une fonction f et sa dérivée première $\dfrac{df}{dx}(x)$, et que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\frac{df}{dx}(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

Où $a(x)$ et $b(x)$ sont deux fonctions.

Équation homogène associée

On appelle équation homogène associée l'équation différentielle pour laquelle le second membre (terme $b(x)$ à droite de l'équation) est nul :

$$\frac{df}{dx}(x) + a(x)f(x) = 0$$

Remarques :

- Dans le cadre du programme de terminale de physique-chimie, on se contentera d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre, à **coefficients constants**, c'est-à-dire avec $a(x) = a$ et $b(x) = b$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
- La variable, notée x ici peut désigner n'importe quelle grandeur physique. On verra que les équations étudiées en terminale en physique-chimie se rapportent essentiellement à la variable temporelle t. L'équation différentielle s'écrira alors :

$$\frac{df}{dt}(t) + af(t) = b$$

et la constante a s'exprime alors en s^{-1} : elle est liée à un temps caractéristique τ tel que $a = \frac{1}{\tau}$.

0.3.2 Solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

Soit une équation différentielle de la forme : $\frac{df}{dt}(t) + af(t) = b$. La solution de cette équation est la somme de la solution à l'équation homogène associée, et d'une solution particulière.
Solution à l'équation homogène : $h(t) = \lambda e^{-at}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
Solution particulière : $f_0(t) = \frac{b}{a}$
D'où la solution générale :

$$f(t) = h(t) + f_0(t) = \lambda e^{-at} + \frac{b}{a}$$

La constante λ dépend des **conditions initiales** : par exemple, savoir que $f(2) = 3$ permet de trouver la valeur de λ

Exemples au programme :

- Cinétique : loi de vitesse d'ordre 1 d'une réaction chimique
- Radioactivité : loi de décroissance exponentielle
- Mécanique : chute dans un fluide visqueux
- Thermodynamique : Transfert thermique conducto-convectif
- Électricité : charge et décharge d'un condensateur dans un circuit RC

0.3.3 Allure de la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

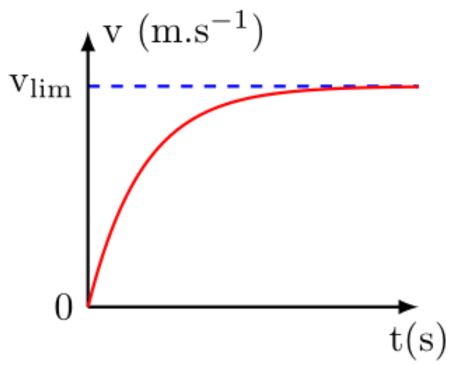

Figure 4 – Courbe représentant l'évolution de la vitesse en fonction du temps dans le cas d'un objet en chute avec frottements visqueux. la fonction $v(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Cette équation est obtenue à partir de la seconde loi de Newton.