Chapitre 12

Mouvement dans un champ uniforme

Une application assez classique de la seconde loi de Newton est l'étude des mouvements dans un champ de pesanteur uniforme ou un champ électrique uniforme. C'est-à-dire une situation où le système n'est soumis qu'à une seule force constante : son poids ou une force électrique constante.

Ce chapitre permet de détailler la méthode de mise en équation et de résolution du problème, et s'articule autour du plan suivant :

- Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme
- Mouvement dans un champ électrique uniforme
- Aspects énergétiques (Rappels de première) (Vidéo)

12.1 Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

12.1.1 Mise en équation du problème

On s'intéresse à un système ponctuel de masse m, soumis uniquement à son poids dans un référentiel terrestre. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé constant, dirigé verticalement vers le bas.
Le mouvement dans une telle situation est appelé **chute libre** (Résumé vidéo ici).

Figure 12.1 – Schéma d'une chute libre en deux dimensions

Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

- Système : {objet de masse m}
- Référentiel : Terrestre supposé galiléen, repère orthonormé (O, x, y)
- Bilan des forces extérieures : Poids $\vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

D'après la seconde loi de Newton, pour un objet de masse constante :

$$m\vec{a}(t) = \vec{P} \iff m\vec{a}(t) = m\vec{g}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{g} \iff \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}$$

12.1.2 Équations horaires de la vitesse

La première étape de la résolution consiste à faire une primitive de $a_x(t)$ et $a_y(t)$ pour trouver les composantes du vecteur vitesse $v_x(t)$ et $v_y(t)$. Il faut ensuite utiliser les conditions initiales sur le vecteur vitesse pour déterminer les constantes d'intégration. Dans le cas présent, ces conditions initiales sont les suivantes :

$$\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} v_{0_x} \\ v_{0_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Équations horaires de la vitesse

$\overrightarrow{a}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt}$ donc par primitive :

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases} \iff \begin{cases} v_x(t) = A \\ v_y(t) = -gt + B \end{cases} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Or :

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} A = v_0 \cos\alpha \\ B = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

D'où les équations horaires de la vitesse :

$$\overrightarrow{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

12.1.3 Équations horaires de la position

de même on primitive la vitesse pour trouver la position, avec pour conditions initiales :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

Équations horaires de la position

$\overrightarrow{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ donc par primitive :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t + C \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + D \end{cases} \quad C, D \in \mathbb{R}$$

Or :

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = h \end{cases} \iff \begin{cases} C = 0 \\ D = h \end{cases}$$

D'où les équations horaires de la position :

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h \end{cases}$$

12.1.4 Équation de la trajectoire

Équation de la trajectoire

Pour obtenir l'équation de la trajectoire $y(x)$, on utilise les équations horaires de la position.

$$x(t) = v_0 \cos\alpha t \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

D'où en injectant dans l'équation de $y(t)$:

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) + h$$

Soit en simplifiant l'écriture :

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2 + \tan\alpha\, x + h$$

Il s'agit d'une fonction polynôme du second degré, représentée graphiquement par une parabole comme le montre la figure 12.2

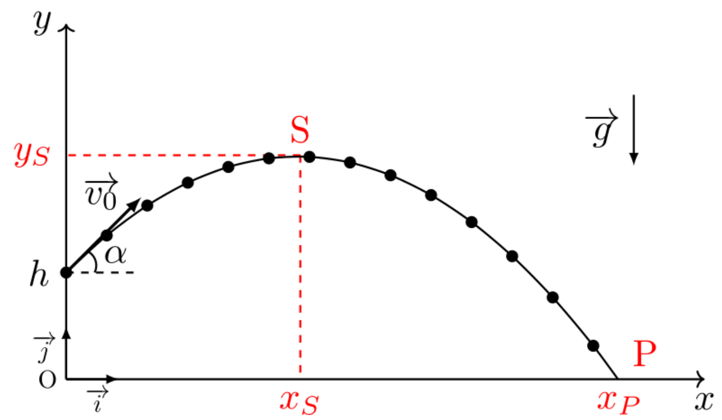

Figure 12.2 – Schéma d'une chute libre en deux dimensions, avec la trajectoire $y(x)$ représentée.

12.1.5 Calcul de la flèche et de la portée

Flèche et portée

La **portée x_P** est la distance parcourue horizontalement par le système jusqu'au point $\boldsymbol{P}$ où il atteint le sol.
x_p est solution de l'équation du second degré $y(x) = 0$.

La **flèche** est le point $\boldsymbol{S}$ correspondant au point le plus haut atteint par le système au cours de son mouvement. En ce point S, le vecteur vitesse est horizontal.
On peut résoudre l'équation $v_y(t) = 0$ pour trouver l'instant t_S où le système passe en S, puis injecter la valeur de t_S dans les équations horaires du mouvement pour trouver x_S et y_S.

12.2 Mouvement dans un champ électrique uniforme

12.2.1 Condensateur plan

Un condensateur plan est composé de deux plaques planes parallèles, de longueur L et séparées d'une distance d. L'une est chargée positivement et l'autre négativement. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ généré entre les deux plaques est orienté de la plaque positive vers la négative (cf. figure 12.3).

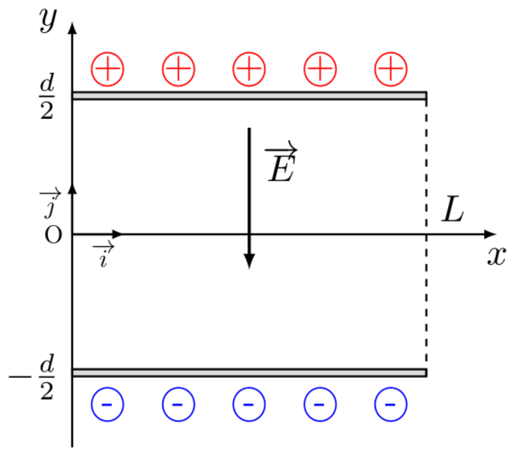

Figure 12.3 – Champ électrique entre les armatures d'un condensateur plan.

Champ électrique d'un condensateur

Soit un condensateur composé de deux plaques planes distantes de d, alimenté par une tension constante U (en V) à ses bornes. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé entre les deux armatures du condensateur est **constant**, avec une norme E (en V.m^{-1}) :

$$E = \frac{U}{d}$$

12.2.2 Mise en équation du problème

On considère une particule de charge q et de masse m, arrivant au point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ horizontale et évoluant entre les deux plaques d'un condensateur plan où règne un champ électrique $\overrightarrow{E}$ constant (cf. 12.3). Le système {particule} n'est soumis qu'à la force électrique $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$ (le poids et les frottements étant supposés négligeables). Résumé vidéo ici.

Mouvement dans un champ électrique uniforme

- Système : {particule}
- Référentiel : Terrestre supposé galiléen, repère orthonormé (O, x, y)
- Bilan des forces extérieures : Force électrique $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E \end{pmatrix}$

D'après la seconde loi de Newton, pour un objet de masse constante :

$$m\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{F} \iff m\overrightarrow{a}(t) = q\overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{q}{m}\overrightarrow{E} \iff \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -\dfrac{qE}{m} \end{cases}$$

Remarque : En fonction du signe de la charge q, la force électrique F sera dirigée vers le haut ou vers le bas. Une charge négative aura une trajectoire déviée vers la borne positive (vers le haut) et une positive vers la borne négative (vers le bas).

12.2.3 Équations horaires de la vitesse

Le vecteur vitesse initiale horizontal a pour coordonnées :

$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} v_{0_x} \\ v_{0_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En procédant comme pour le cas du champ de pesanteur uniforme, on peut calculer les primitives et utiliser les conditions initiales pour déterminer les équations horaires de la vitesse.

Équations horaires de la vitesse

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = A \\ v_y(t) = -\dfrac{qE}{m}t + B \end{cases} \iff \vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -\dfrac{qE}{m}t \end{cases} \quad \text{avec} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12.2.4 Équations horaires de la position

De même par primitive de la vitesse, on obtient le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ avec pour conditions initiales une particule à l'origine O :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Équations horaires de la position

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 t + C \\ y(t) = -\dfrac{qE}{2m}t^2 + D \end{cases} \iff \vec{v}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\dfrac{qE}{2m}t^2 \end{cases} \quad \text{avec} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12.3 Aspects énergétiques (Rappels de première)

12.3.1 Énergie cinétique

Énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

12.3.2 Énergies potentielles

Énergie potentielle de pesanteur

L'**énergie potentielle de pesanteur** E_{pp} dans un champ de pesanteur uniforme de norme g (en m.s^{-2}), pour un système de masse m (en kg), situé à l'altitude z (en m), est donnée par la relation suivante :

$$E_{pp} = mgz$$

Énergie potentielle électrique

La variation d'énergie potentielle électrique ΔE_{pe} entre un point A et un point B est égale à l'opposé du travail de la force électrique $\overrightarrow{F}$:

$$\Delta E_{pe} = -W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = -q\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{AB}$$

12.3.3 Énergie mécanique et théorème de l'énergie mécanique

Énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p$$

Théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = \sum W\left(\overrightarrow{F}_{NC}\right)$$

Si un système est conservatif (donc soumis à aucune force non conservative), alors la variation d'énergie mécanique est nulle et l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement.