Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion septembre 2007

EXERCICE 1 **5 points**

1. **Restitution organisée de connaissances**

   P est vraie : il suffit de reprendre la définition du nombre dérivé de la fonction x^n en un point x_0. L'application du dévoppement de $(x_0+h)^n$ par la formule du binôme permet de montrer que $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

   Q est fausse : on a ici la dérivée d'une fonction composée et $f'(x) = nu'u^{n-1}$.

2. **a.** Avec $h(x) = g(\cos x)$, $h'(x) = (\cos x)'g'(\cos x) = -\sin x \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}$.

   Comme $x \in]-\pi\,;\,0[$, $\sin x < 0$, donc $\sqrt{\sin^2 x} = -\sin x$.

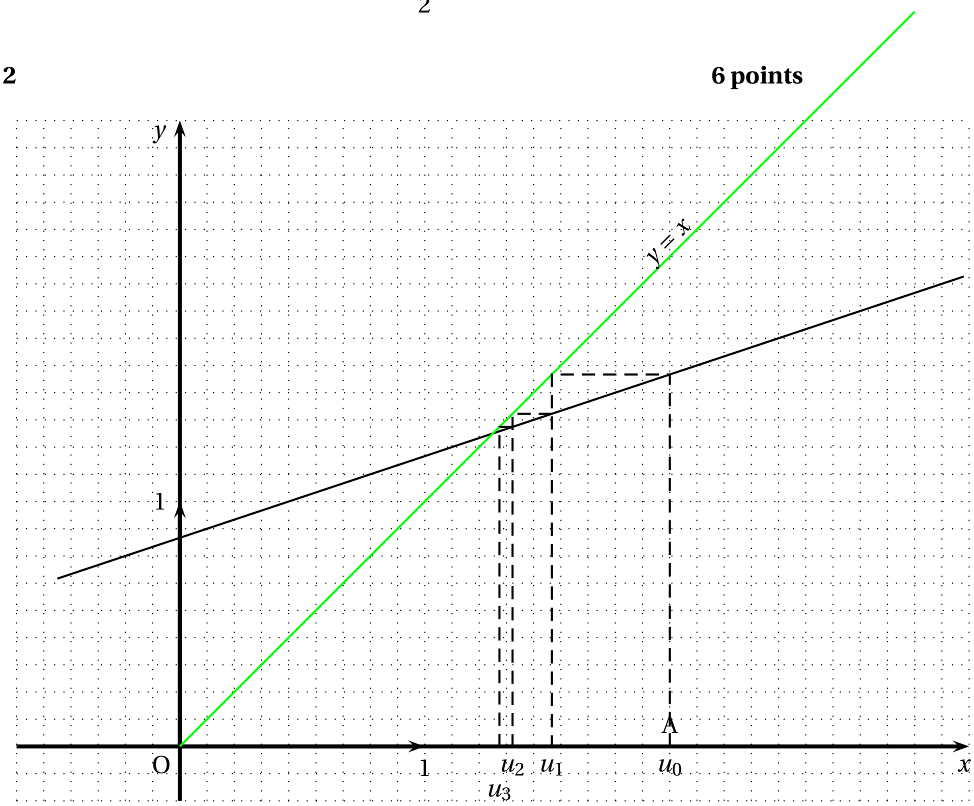
   Finalement $h'(x) = \dfrac{-\sin x}{-\sin x} = 1$.

   b. $h'(x) = 1$ implique $h(x) = x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

   $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = g\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = g(0) = 0$. Donc $0 = -\dfrac{\pi}{2} + k \iff k = \dfrac{\pi}{2}$.

   Conclusion : sur $]-\pi\,;\,0[$, $h(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 **6 points**



1. **a.**

   b. Si la suite est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

   La relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ donne par passage à la limite $\ell = \dfrac{1}{3}\ell + \dfrac{23}{27} \iff \dfrac{2}{3}\ell = \dfrac{23}{27} \iff \ell = \dfrac{23}{18}$.

c. Par récurrence :

– Initialisation : $u_0 = 2 = \dfrac{36}{18} \geqslant \dfrac{23}{18}$.

– Hérédité : supposons que $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$; alors $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant \dfrac{1}{3} \times \dfrac{23}{18}$ soit $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant \dfrac{23}{54}$.
Puis $\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27} \geqslant \dfrac{23}{54} + \dfrac{23}{27} \iff u_{n+1} \geqslant \dfrac{3 \times 23}{3 \times 18} \iff u_{n+1} \geqslant \dfrac{23}{18}$.
On a donc bien démontré que pour tout naturel n, $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.

d. Monotonie :

On la démontre par récurrence :

– Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{23}{27} = \dfrac{41}{27} < \dfrac{54}{27} = u_0$. Donc $u_0 > u_1$.

– Hérédité :
Supposons qu'il existe un naturel p tel que $u_{p-1} > u_p$. Par croissance de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on a $f\left(u_{p-1}\right) > f\left(u_p\right) \iff u_p <> u_{p+1}$.

Conclusion : on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc minorée et décroissante : elle est donc convergente ; on sait d'après ce qui précède que la limite de cette suite est $\dfrac{23}{18}$.

2. a. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{10^k}$.

$$\begin{array}{rclllll} S_n & = & \dfrac{1}{10^2}+ & \dfrac{1}{10^3}+ & \cdots + & \dfrac{1}{10^{n+1}} & \\ \dfrac{1}{10}S_n & = & & \dfrac{1}{10^3}+ & \cdots + & \dfrac{1}{10^{n+1}}+ & \dfrac{1}{10^{n+1}} \end{array}$$

Par différence on obtient $\dfrac{9}{10}S_n = \dfrac{1}{10^2} - \dfrac{1}{10^{n+2}} = \dfrac{1}{10}\left(10 - \dfrac{1}{10^n}\right) \iff S_n = \dfrac{1}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$.

b. On a $v_1 = 1,2 + 7 \times \dfrac{1}{10^2}$; $v_2 = 1,2 + 7\left(\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1,2 + 7\left(\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \cdots + \dfrac{1}{10^{2n+1}}\right) = 1,2 + 7 \times \dfrac{1}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10^n} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 1,2 + \dfrac{7}{90} = \dfrac{12}{10} + \dfrac{7}{90} = \dfrac{115}{90} = \dfrac{23}{18}$. Cette limite est bien rationnelle.

3. Suites adjacentes ?

On a vu que la suite (u_n) est décroissante.

De plus $v_{n+1} - v_n = \dfrac{7}{10^{n+2}} > 0$: la suite (v_n) est donc croissante.

Enfin ces deux suites ont la même limite $\dfrac{23}{18}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Conclusion : ces deux suites sont adjacentes.

EXERCICE 3 — 5 points

1. On a $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}}{2 + 2\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 - \mathrm{i})}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1 + \sqrt{3} - \mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)\right]$.

2. Modules et arguments :

– $|z_1|^2 = 2 + 6 = 8 \Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$. On a donc $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Donc $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

– On a de même $|z_2| = 2\sqrt{2}$, puis $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Donc $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.

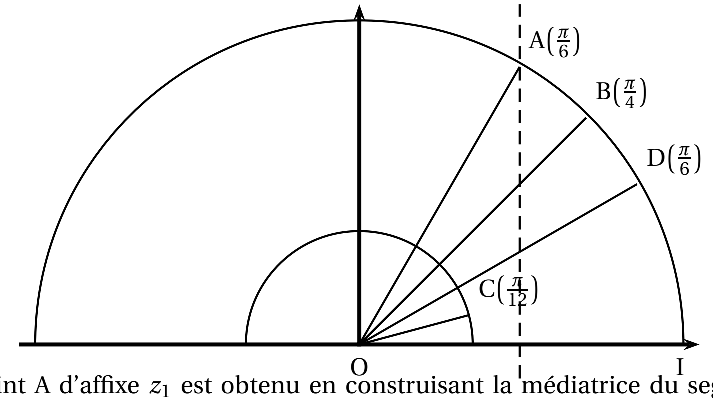
– Il suit $Z = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

Donc $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{12} \quad [2\pi]$.

3. On déduit des deux questions précédentes que $Z = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et par identification :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

4. On place facilement le point B(2 ; 2) :



Le point A d'affixe z_1 est obtenu en construisant la médiatrice du segment [OI].

Le point D est obtenu en construisant la bissectrice de $\widehat{\text{IOA}}$.

Le point C avec la bissectrice de $\widehat{\text{IOD}}$ et le cercle de centre O et de rayon 1.

5. Le module : $\left|Z^{2007}\right| = |Z|^{2007} = 1^{2007} = 1$.

L'argument : $\arg\left(Z^{2007}\right) = 2007 \times \dfrac{\pi}{12}\dfrac{669\pi}{4} = \dfrac{672\pi - 3\pi}{4} = 2\pi - 3\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}$.

On a donc $Z^{2007} = \mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 3 — 5 points

Enseignement de spécialité

1. a.

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

b. On vient de voir que $5 \times 3 \equiv 1 \pmod 7$ donc $3x \equiv 5 \pmod 7 \iff 5 \times 3x \equiv 5 \times 5 \pmod 7$ mais comme $25 \equiv 4 \pmod 7$ on a bien $3x \equiv 5 \pmod 7 \iff x \equiv 4 \pmod 7$.

c. L'équation $ax \equiv 0 \pmod 7$ équivaut $7 \mid ax$ mais comme 7 est premier avec a d'après le théorème de Gauss on a : $7 \mid x$.

2. a. Comme $a \times a^{p-2} = a^{p-1}$ et que a n'est pas divisible par p, d'après le petit théorème de Fermat on a $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, donc a^{p-1} est solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$.

b. On a $r \equiv a^{p-2} \pmod p$ donc r est bien solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$.

Maintenant montrons l'unicité par l'absurde.

On suppose que deux entiers r_1 et r_2 de A_p sont solutions de l'équation.

On a $ar_1 \equiv ar_2 \pmod{p} \iff a^{p-2} \times ar_1 \equiv a^{p-2} \times ar_2 \pmod{p} \iff r_1 \equiv r_2 \pmod{p}$. Ainsi $r_1 - r_2$ est un multiple de p mais $r_1 - r_2$ est dans l'ensemble $\{-(p-1)\ ;\ -(p-2)\ ;\ \dots\ ;\ p-1\}$, et le seul multiple de p dans cet ensemble est : 0 donc $r_1 = r_2$, ce qui montre l'unicité.

c. On a $xy \equiv 0 \pmod{p}$ donc soit $p \mid x$ soit p et x sont premiers entre eux et d'après le théorème de Gauss on a : $p \mid y$.

d. On sait que le reste de la division de 2^{31-2} par 31 est l'unique solution de l'équation $2x \equiv 1 \pmod{31}$, or $2^5 \equiv\equiv 1 \pmod{31}$ donc $2^{25} \equiv 1 \pmod{31}$ ainsi $2^{29} \equiv\equiv 2^4 \pmod{31}$, $2^4 = 16$ est l'unique solution de de l'équation $2x \equiv 1 \pmod{31}$ dans A_{31}.

On sait que le reste de la division de 3^{31-2} par 31 est l'unique solution de l'équation $3x \equiv 1 \pmod{31}$. Xcas `irem(3^29,31)` donne 21 (sinon faire tous les calculs jusqu' 3^{29}).

Pour la dernière équation, on factorise :

$6x^2 - 5x + 1 = (2x-1)(3x-1)$ ainsi

$$\begin{aligned} 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31} &\iff (2x-1)(3x-1) \equiv 0 \pmod{31} \\ &\iff (2x-1) \equiv 0 \pmod{31} \text{ ou } (3x-1) \equiv 0 \pmod{31} \end{aligned}$$

On sait donc que les solutions de ces deux dernières équations sont dans $\mathbb{Z}$: $16 + 31k$ et $21 + 31k$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'après les deux équations précédentes.

EXERCICE 4 — 5 points

1. (E_0) : $y' + y = 1 \iff y' = -y + 1 \iff y = C^{-x} + 1$ où C est une constante réelle.
2. f solution de (E) $\iff f' + (1 + \tan x) f = \cos x$

   Or $f(x) = g(x)\cos x$. f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que produit de fonctions dérivables

   et $f'(x) = g'(x)\cos x - g(x)\sin x$

   Ainsi f solution de E $\iff g'\cos x - g\sin x + (1 + \tan x) g \cos x = \cos x$

   $\iff g'\cos x - g\sin x + \left(1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) g\cos x = \cos x$

   $\iff g'\cos x - g\sin x + g\cos x + g\sin x = \cos x \iff (g' + g)\cos x = \cos x$

   $\iff g' + g = 1$ car $\cos x \neq 0$ pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$

   $\iff g$ est solution de (E_0).
3. f est solution de (E) donc G est solution de (E_0). Or les solutions de (E_0) sont les fonctions du type $x \longmapsto C^{-x}+1$ et ainsi, puisque $f = g\cos x$, $f = (C^{-x} + 1)\cos x$.

   De plus, $f(0) = 0 \Longrightarrow \left(C\mathrm{e}^0 + 1\right)\cos 0 = 0 \Longrightarrow C = -1$

   f est donc la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = (-\mathrm{e}^{-x} + 1)\cos x$