

Durée : 4 heures

∞ Corrigé du baccalauréat S ∞
Amérique du Sud novembre 2010

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

1. La droite \mathcal{D}' a pour vecteur directeur \vec{u} $(-1 ; 3 ; -1)$ lequel n'est manifestement pas colinéaire au vecteur \vec{i} , vecteur directeur de la droite des abscisses \mathcal{D} : donc les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas parallèles.

Prouvons à présent qu'elle ne sont pas sécantes.

Une représentation paramétrique de \mathcal{D} étant :
$$\begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, u \in \mathbb{R},$$

on a pour $M(x; y; z)$:

$$M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \iff \text{il existe } (u; t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} u = -t \\ 0 = 3+3t \\ 0 = 1-t \end{cases}$$
$$\iff \text{il existe } (u; t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} u+t = 0 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, le système n'a pas de solution et donc les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas sécantes.

Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont donc **non coplanaires**.

2. Le vecteur $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ sera un vecteur directeur de Δ si $\vec{w} \perp \vec{i}$ et $\vec{w} \perp \vec{u}$, i.e. si $a = 0$ et $-a + 3b - c = 0$, i.e. encore si $a = 0$ et $c = 3b$. Prenons $b = 1$. Alors le vecteur $\vec{w} = \vec{j} + 3\vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ .

3. a. Soit $M(u; 0; 0)$ un point de \mathcal{D} . On a alors : $-3y + z = -3 \times 0 + 0 = 0$. Donc $M \in \mathcal{P}$ et ceci quel que soit le point M de \mathcal{D} .

Donc le plan \mathcal{P} d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite \mathcal{D} .

- b. En tant que point de \mathcal{D}' le point J a pour coordonnées $(-t; 3+3t; 1-t)$. Pour obtenir t exprimons que J appartient au plan \mathcal{P} :

$$-3y + z = 0 \iff -3(3+3t) + (1-t) = 0 \iff -10t = 8 \iff t = -\frac{4}{5}.$$

On en déduit que les coordonnées du point d'intersection J de la droite \mathcal{D}' et du plan \mathcal{P} sont $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

- c. Désignons par Δ_1 la droite passant par J et de vecteur directeur \vec{w} . Elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} + v \\ z = \frac{9}{5} + 3v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

Étudions l'intersection des droites \mathcal{D} et Δ_1 . On a pour $M(x; y; z)$:

$$M \in \mathcal{D} \cap \Delta_1 \iff \text{il existe } (u; v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} u = \frac{4}{5} \\ 0 = \frac{3}{5} + v \\ 0 = \frac{9}{5} + 3v \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (u; v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} u = \frac{4}{5} \\ v = -\frac{3}{5} \\ v = -\frac{3}{5} \end{cases}.$$

Donc la droite Δ_1 est sécante à \mathcal{D} en un point I de coordonnées $\left(\frac{4}{5}; 0; 0\right)$.

Montrons que Δ_1 c'est Δ .

La droite Δ_1 a pour vecteur directeur \vec{w} , donc elle est parallèle à Δ , donc elle est orthogonale à \mathcal{D} et à \mathcal{D}' .

D'autre part elle rencontre \mathcal{D} en I et \mathcal{D}' en J.

Donc Δ_1 est une droite perpendiculaire à \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

Enfin, d'après 1. \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont deux droites non coplanaires, et on a admis qu'il existe dans ce cas une unique droite perpendiculaire à \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

Donc Δ_1 est bien la **perpendiculaire commune** Δ à \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

- d. Le vecteur \vec{IJ} ayant pour coordonnées $\left(0; \frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$, on en déduit que la distance de \mathcal{D} à \mathcal{D}' est : $d(\mathcal{D}; \mathcal{D}') = IJ = \frac{3}{5} \times \sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On sait que la rotation R_A a pour écriture complexe : $z' - a = e^{-\frac{i\pi}{2}}(z - a)$, i.e. $z' - a = -i(z - a)$.

$$\text{Donc } u = -i(z - a) + a = -iz + a(1 + i) = -iz + 5 \underbrace{(1 + i)^2}_{=2i} = -iz + 10i = i(10 - z).$$

L'affixe du point U est donc $u = i(10 - z)$.

De même la rotation R_B a pour écriture complexe : $z' - b = e^{\frac{i\pi}{2}}(z - b)$, i.e. $z' - b = i(z - b)$.

$$\text{Donc } t = i(z - b) + b = iz + b(1 - i) = iz + 5 \underbrace{(1 - i)^2}_{=-2i} = iz - 10i = i(z - 10).$$

L'affixe du point T est donc $t = i(z - 10)$.

Montrons que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.

On sait déjà que O est le milieu de $[MD]$.

D'autre part, on a $u + t = 0$. Donc O est le milieu de $[UT]$.

Les diagonales du quadrilatère $MUDT$ se coupent en leur milieu O : donc c'est un parallélogramme de centre O.

2. On remarque que : $z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} = (z - 5)(\bar{z} - 5) - 25$.

Donc :

$$M_z \in \Gamma \iff (z-5)(\bar{z}-5) = 25 \iff (z-5)(\overline{z-5}) = 25 \iff |z-5|^2 = 5^2 \iff |z-5| = 5.$$

L'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} = 0$ est donc le **cercle** de centre Ω d'affixe 5 et de rayon $r = 5$.

Comme on a $\Omega A = \Omega P = \Omega O = \Omega B = 5 = r$, le quadrilatère $OAPB$ est inscrit dans Γ .

3. a. Les points O , M et U sont alignés si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{OU} et \overrightarrow{OM} sont colinéaires, i.e. puisque \overrightarrow{OM} n'est pas nul, si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OU} = k\overrightarrow{OM}$, i.e. encore s'il existe un réel k tel que $u = kz$.

$$\text{Or : } u = kz \text{ avec } k \text{ réel} \iff \frac{u}{z} \in \mathbb{R} \iff \frac{u}{z} = \overline{\left(\frac{u}{z}\right)} \iff \frac{u}{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}}.$$

Donc les points O , M et U sont alignés si et seulement si $\frac{u}{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}}$.

- b. Il résulte du a. que les points O , M et U sont alignés si et seulement si $u\bar{z} - \bar{u}z = 0$.

Or :

$$u\bar{z} - \bar{u}z = 0 \iff i(10-z)\bar{z} + i(10-\bar{z})z = 0 \iff 10\bar{z} + 10z - 2z\bar{z} = 0 \iff z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} = 0 \iff M \in \Gamma.$$

Donc les points O , M et U sont alignés si et seulement si M appartient au cercle Γ .

4. OMU est isocèle en $O \iff OM = OU \iff |z| = |u| \iff |z| = |10-z| \iff OM = MP \iff M$ appartient à la médiatrice du segment $[OP]$.

Donc l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O est la droite (AB) .

On a dans ce cas $OM = OU$, donc $DM = TU$.

Le parallélogramme $MUDT$ a donc ses diagonales de même longueur : c'est un **rectangle**.

5. $\frac{u}{z}$ est un imaginaire pur $\iff \frac{u}{z} = -\overline{\left(\frac{u}{z}\right)} \iff \frac{u}{z} = -\frac{\bar{u}}{\bar{z}} \iff u\bar{z} + \bar{u}z = 0 \iff i(10-z)\bar{z} - i(10-\bar{z})z = 0 \iff 10\bar{z} - 10z = 0 \iff \bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$.

Donc l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{u}{z}$ soit un imaginaire pur est l'axe réel privé de O .

Si M est un point de la droite (OP) privée de O et P , alors $z \neq 0$ et $u \neq 0$ et on a :

$$\arg\left(\frac{u}{z}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi).$$

Et comme $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OU}) = \arg\left(\frac{u}{z}\right) \quad (2\pi)$, on en déduit : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OU}) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

Le parallélogramme $MUDT$ a donc ses diagonales perpendiculaires : c'est un **losange**.

Le quadrilatère $MUDT$ est un carré si c'est un rectangle et un losange, donc si M est sur la droite (AB) et sur la droite (OP) privée de O et P , i.e. si M est en Ω .

Donc il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré : c'est Ω .

1. a. 11 est impair donc 11^4 est impair : l'entier $A(11)$ est pair.

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$- \text{ Si } n \equiv 0 \pmod{3}, \quad n^4 \equiv 0 \pmod{3}, \quad A(n) \equiv 1 \pmod{3}.$$

$$- \text{ Si } n \equiv 1 \pmod{3}, \quad n^4 \equiv 1 \pmod{3}, \quad A(n) \equiv 2 \pmod{3}.$$

$$- \text{ Si } n \equiv 2 \pmod{3}, \quad n^4 \equiv 1 \pmod{3}, \quad A(n) \equiv 2 \pmod{3}.$$

Donc, quel que soit l'entier $n \geq 2$, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

c. Soit d un diviseur de $A(n)$: il existe un entier k tel que $n^4 + 1 = kd$, i.e. tel que :

$$kd - n^3 \times n = 1.$$

On en déduit, d'après le théorème de Bezout, que d et n sont premiers entre eux.

Donc, tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n .

d. Soit d un diviseur de $A(n)$. On a alors : $n^4 + 1 \equiv 0 \pmod{d}$.

$$\text{D'où : } n^4 \equiv -1 \pmod{d}, \text{ et donc : } n^8 \equiv 1 \pmod{d}.$$

Donc, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

$$n^8 \equiv 1 \pmod{d}.$$

2. a. Soit k un entier tel que $n^k \equiv 1 \pmod{d}$.

Effectuons la division euclidienne de k par s (l'existence de s est assurée d'après 1.d) :

Il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que $k = sq + r$ avec $0 \leq r < s$.

$$\text{D'où : } n^k = (n^s)^q \times n^r. \text{ Or : } n^s \equiv 1 \pmod{d}. \text{ Donc : } (n^s)^q \equiv 1 \pmod{d}.$$

$$\text{Et comme } n^k \equiv 1 \pmod{d}, \text{ il en résulte : } n^r \equiv 1 \pmod{d}.$$

Or $r < s$ et s est le plus petit entier naturel non nul ayant cette propriété. Donc $r = 0$ et donc s divise k .

b. On a vu au 1.d que : $n^8 \equiv 1 \pmod{d}$. Donc d'après a, s est un diviseur de $k = 8$.

c. D'après 1.c, l'entier d est premier avec n . Si, de plus, d est premier, alors il découle du petit théorème de Fermat que :

$$n^{d-1} \equiv 1 \pmod{d}.$$

Comme $d \geq 2$ (car premier) alors $k = d - 1$ est un entier naturel non nul. D'où, d'après a, s divise k , i.e. s divise $d - 1$.

On a donc montré que :

$$\boxed{\text{Si } d \text{ est un diviseur premier de } A(n), \text{ alors } s \text{ est un diviseur de } d - 1.}$$

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de $A(n)$ et soit s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \pmod{p}$.

D'après 2.b s est un diviseur de 8, donc $s \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Si $s \in \{1, 2, 4\}$, i.e. si s est un diviseur de 4, alors de : $n^s \equiv 1 \pmod{p}$ on déduit :

$$n^4 \equiv 1 \pmod{p}.$$

D'où :

$$A(n) \equiv 2 \pmod{p}.$$

Or on a $\boxed{p > 2}$, puisque n étant un entier pair alors $A(n)$ est un entier impair.

Donc $A(n)$ n'est pas un multiple de p , contrairement à l'hypothèse.

Donc s ne divise pas 4 : donc $s = 8$, et, d'après 2.c, 8 est un diviseur de $p - 1$, i.e. $p - 1 \equiv 0 \pmod{8}$, et donc $p \equiv 1 \pmod{8}$.

On a donc montré que, dans le cas où n est un entier pair :

Si p est un diviseur premier de $A(n)$, alors p est congru à 1 modulo 8.

4. Recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

$A(12) = 20737$. En effectuant les divisions successives de 20737 par les nombres de la liste donnée, on constate que $20737 = 89 \times 233$.

Or $\sqrt{233} \approx 15,3$ donc $\sqrt{233} < 17$. Et comme, dans la liste, il n'y a pas d'autres nombres avant 17, cela signifie que 233 fait partie de la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8.

Donc les diviseurs premiers de $A(12)$ sont 89 et 233.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

1. Les événements F , A , C et I constituent une partition de l'univers. Donc :

$$P(F) + P(A) + P(C) + P(I) = 1.$$

D'où, puisque $P(A) = P(F)$ et $P(C) = P(I) = 2P(F)$ on a : $P(F) + P(F) + 2P(F) + 2P(F) = 1$, i.e. $6P(F) = 1$.

On obtient donc : $p(F) = p(A) = \frac{1}{6}$ et $P(C) = P(I) = \frac{1}{3}$.

2. a. $P(S \cap A) = P(A) \times P_A(S) = \frac{1}{6} \times 0,5 = \frac{1}{12}$.

b. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(S) = P(S \cap F) + P(S \cap A) + P(S \cap AC) + P(S \cap I).$$

Donc :

$$P(S) = \frac{1}{6} \times 0,2 + \frac{1}{6} \times 0,5 + \frac{1}{3} \times 0,1 + \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{1}{6} \underbrace{(0,7 + 2 \times 0,5)}_{=1,7} = \frac{17}{60}.$$

c. On demande la valeur de $P_S(C)$:

$$P_S(C) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0,1}{\frac{1}{6} \times 1,7} = \frac{2}{17}.$$

La probabilité qu'il ait acheté le supplément sur le site canadien est $\frac{2}{17}$.

3. a. $d^2 = \left(0,335 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0,310 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0,355 - \frac{1}{3}\right)^2 \approx 0,0010167$.

D'où : $1000d^2 \approx 1,0167$.

b. Le neuvième décile est : $D_9 = 1,5104$. Donc $1000d^2 < D_9$.

On peut donc considérer, au risque de 10 %, que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable.

EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

1. Pour tout réel
- x
- de
- $[0; 1]$
- :

$$f'(x) = \frac{e^x[(1+x) - 1]}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

Comme $x \geq 0$ et que pour tout réel x , e^x est > 0 , on a $f'(x) \geq 0$.Donc f est croissante sur $[0; 1]$.

2. a. On partage l'intervalle
- $[0; 1]$
- en cinq intervalles de même longueur
- $\frac{1}{5}$
- .

Si bien que :

$$[0; 1] = \bigcup_{0 \leq k \leq 4} \left[\frac{k}{5}; \frac{k+1}{5} \right].$$

Soit k un entier compris entre 0 et 4. La fonction f étant croissante surl'intervalle $[0; 1]$, elle l'est en particulier sur l'intervalle $I_k = \left[\frac{k}{5}; \frac{k+1}{5} \right]$.Donc pour tout x de I_k :

$$f\left(\frac{k}{5}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

Il découle alors de l'inégalité de la moyenne que :

$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x) dx \leq \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

i.e. :

$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

et ceci, quel que soit l'entier k compris entre 0 et 4.Interprétation graphique : la fonction f étant continue et positive sur l'intervalle I_k , l'intégrale ci-dessus représente l'aire sous la courbe de la fonction f , exprimée en unité d'aire.On en déduit que cette aire est comprise entre l'aire du rectangle r_K , situé au-dessous de la courbe, et celle du rectangle R_K , situé au-dessus de la courbe, ces rectangles ayant pour base $\frac{1}{5}$ et pour hauteurs respectives $f\left(\frac{k}{5}\right)$ et $f\left(\frac{k+1}{5}\right)$.

- b. En sommant les inégalités précédentes pour
- k
- compris entre 0 et 4, on obtient :

$$\sum_{k=0}^4 \frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \sum_{k=0}^4 \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \leq \sum_{k=0}^4 \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

Or :

- $\sum_{k=0}^4 \frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5}S_4.$
- $\sum_{k=0}^4 \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx$ (Relation de Chasles).
- $\sum_{k=0}^4 \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right) = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 f\left(\frac{k+1}{5}\right) = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5}(S_5 - 1).$

Il en résulte :

$$\frac{1}{5}S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5}(S_5 - 1).$$

c. On trouve, à 10^{-4} près : $S_4 \approx 5,4587$ et $S_5 \approx 6,8178$.

D'où : $\frac{1}{5}(S_4) \approx 1,0917$ qu'on **minore** par 1,091

et $\frac{1}{5}(S_5 - 1) \approx 1,1636$ qu'on **major**e par 1,164.

Ce qui nous donne l'encadrement : $1,091 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq 1,164$.

3. a. Pour tout réel x de $[0; 1]$, on a :

$$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x) + x^2}{1+x} = \frac{(1-x^2) + x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}.$$

Donc, pour tout réel x de $[0; 1]$, on a : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$.

b. En multipliant par e^x dans l'égalité précédente, on obtient, pour tout réel x de $[0; 1]$:

$$\frac{e^x}{1+x} = (1-x)e^x + \frac{x^2 e^x}{1+x}.$$

D'où, en intégrant de 0 à 1 :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx + I.$$

c. Pour calculer l'intégrale $\int_0^1 (1-x)e^x dx$, les fonctions sous le signe somme étant continues, ainsi que leurs dérivées, on peut effectuer une intégration par parties. Posons :

$$\left| \begin{array}{l} u'(x) = e^x \\ v(x) = 1-x \end{array} \right| \frac{u(x) = e^x}{v'(x) = -1} \\ u(x)v'(x) = -e^x$$

D'où :

$$\int_0^1 (1-x)e^x dx = [(1-x)e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = [(1-x)e^x]_0^1 + [e^x]_0^1 =$$

$$[(1-x)e^x + e^x]_0^1 = [(2-x)e^x]_0^1 = e - 2.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 (1-x)e^x dx = e - 2.$$

d. Puisque $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx - \int_0^1 (1-x)e^x dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx - (e - 2)$,

On déduit de l'encadrement obtenu au 2.c que :

$$1,091 - (e - 2) \leq I \leq 1,164 - (e - 2).$$

D'où l'encadrement d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1} suivant :

$$0,37 \leq I \leq 0,45.$$