Corrigé du baccalauréat S La Réunion septembre 2010

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in P \cap Q \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x+3y+z-4 & = & 0 \end{array}\right.$.

   En posant $z = t,\ t \in \mathbb{R}$, le système devient :

   $$\left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & -t \\ 2x+3y & = & 4-t \\ z & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} 2x+2y & = & -2t \\ 2x+3y & = & 4-t \\ z & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} y & = & 4+t \\ 2x+3y & = & 4-t \\ z & = & t \end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{rcr} y & = & 4+t \\ 2x & = & 4-t-12-3t \\ z & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} y & = & 4+t \\ 2x & = & -8-4t \\ z & = & t \end{array}\right. \iff$$

   $$\left\{\begin{array}{rcr} y & = & 4+t \\ x & = & -4-2t \\ z & = & t \end{array}\right. \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

   Ceci est bien l'équation paramétrique d'une droite D contenant le point $(4\,;\,-4\,;\,0)$ et de vecteur directeur $(1\,;\,-2\,;\,1)$.

2. **a.** $M(x\,;\,y\,;\,z) \in P_\lambda \iff (1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4) = 0 \iff$ $(1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+z-4\lambda = 0$.

   Un vecteur normal à ce plan est $\overrightarrow{n}\,(1+\lambda\,;\,1+2\lambda\,;\,1)$.

   b. Les plans P et P_λ sont confondus si et seulement si les coefficients de leurs équations sont proportionnels, soit :

   $\dfrac{1+\lambda}{1} = \dfrac{1+2\lambda}{1} = \dfrac{1}{1}$ qui conduit à $\lambda = 0$.

   c. Un vecteur normal au plan P est $p(1\,;\,1\,;\,1)$.

   P et P_λ sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux soit $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \iff 1(1+\lambda)+1(12\lambda)+1 = 0 \iff 3+3\lambda = 0 \iff$ $\lambda = -1$.

   Le plan P_{-1} d'équation $-y+z+4 = 0$ est perpendiculaire au plan P.

3. Comme à la question 1. il faut résoudre le système :

   $$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 0 \\ -y+z & = & -4 \end{array}\right.$$

   Posons $z = u$, $u \in \mathbb{R}$ quelconque. Le système devient :

   $$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+u & = & 0 \\ -y+u & = & -4 \\ z & = & u \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & -u \\ y & = & u+4 \\ z & = & u \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2u-4 \\ y & = & u+4 \\ z & = & u \end{array}\right.$$

   • Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de D. On sait alors que $x+y+z = 0$ et $2x+3y+z-4 = 0$, mais alors $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4) = 0+0 = 0$: autrement dit tout point de D droite commune à P et Q est un point de P_λ, donc en particulier de P_{-1}.

   Conclusion D est la droite commune aux plans P et P_{-1}.

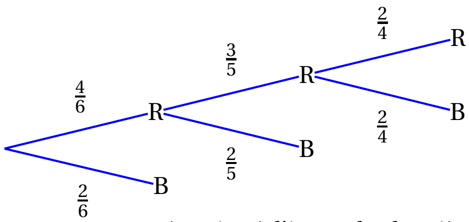
4. Soit H et K les projeté orthogonaux de A respectivement sur P et P_{-1} ; soit I le projeté orthogonal de A sur D.

   Les points A, H, K et I sont coplanaires : ils appartiennent au plan perpendiculaire à P et P_{-1} contenant A. (AH) et (AK) perpendiculaires à deux plans perpendiculaires sont perpendiculaires.

Le quadrilatère AHIK est donc un rectangle.
On a $d(\text{A},\ P) = \text{AH} = \dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$;
$d\,(\text{A},\ P_{-1}) = \text{AK} = \dfrac{|-1+1+4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.
D'après le théorème de Pythagore :
$\text{AI}^2 = \text{AH}^2 + \text{AK}^2 = 3+8 = 11$, donc :
$d(\text{A},\ D) = \text{AI} = \sqrt{11}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats



1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :

- $\dfrac{19}{15}$ • $\dfrac{2}{5}$ • $\dfrac{11}{15}$ • $\boxed{\dfrac{4}{15}}$

2. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :

- $\boxed{\dfrac{1}{5}}$ • $\dfrac{1}{2}$ • $\dfrac{2}{15}$ • $\dfrac{1}{9}$

3. La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :

- $\dfrac{3}{5}$ • $\dfrac{4}{15}$ • $\boxed{\dfrac{7}{15}}$ • $\dfrac{1}{3}$

4. La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :

- $\boxed{\dfrac{7}{10}}$ • $\dfrac{7}{15}$ • $\dfrac{11}{15}$ • $\dfrac{5}{9}$

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = -\infty$.

2. On a $\dfrac{\ln(x)}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on en déduit par produit des limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

Puisque $x \neq 0$, on peut écrire $f_k(x) = x^2\left(\dfrac{f_k(x)}{x^2} - k + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et on vient de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_k(x)}{x^2}-k+$

3. f_k somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f_k'(x)=\dfrac{1}{x}-2kx=\dfrac{1-2kx^2}{x}$.

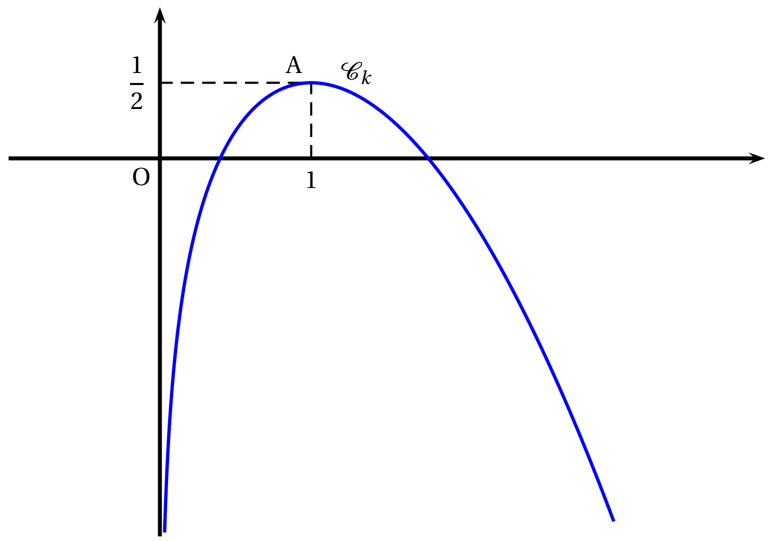
4. • Signe de la dérivée : Comme $x>0$, la dérivée est du signe du numérateur et $1-2kx^2=0 \iff 1=2kx^2 \iff x^2=\dfrac{1}{2k} \iff x=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ ou $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$.

Donc sur $]0~;~+\infty[$, la dérivée ne s'annule qu'en $\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$.

D'après la règle su signe du trinôme $1-2kx^2$, la dérivée est du signe de $-2k$ donc négative sur $\left]0~;~\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right[$ et positive sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2k}}~;~+\infty\right[$, ce qui justifie les fléches du tableau de variations

D'autre part f_k a un maximum $f_k\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right)-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}-\ln\left(\sqrt{2k}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(2k)=\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$.

5. Le plus simple est de considérer le maximum : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-\ln(2k)}{2} \iff \ln(2k)=0 \iff 2k=1 \iff k=\dfrac{1}{2}$.



Partie B

1. On pose : $\left\{\begin{array}{l c l} u' & = & 1\\ v & = & \ln x\end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{l c l} u & = & x\\ v' & = & \dfrac{1}{x}\end{array}\right.$

Toutes ces fonctions étant dérivables, donc continues sur $\left[\frac{1}{2}~;~1\right]$, on peut intégrer par parties et

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln(x)\,\mathrm{d}x=[x\ln x]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[x\ln x-x]_{\frac{1}{2}}^{1}=-1-\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=$ $-1+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\ln(2)-1)$.

2. On a $f_{\frac{1}{2}}(x)=\ln x-\dfrac{x^2}{2}+1$ et on sait que la fonction est croissante sur $]0~;1]$.

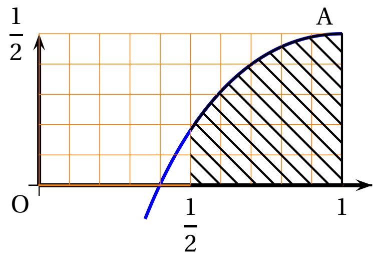
Or $f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + 1 = -\ln 2 - \dfrac{1}{8} + 1 = \dfrac{7}{8} - \ln 2 \approx 0,18$.

Conclusion : la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ est positive sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, donc l'aire $\mathscr{A}$ de la surface limitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_{\frac{1}{2}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\ln x - \frac{x^2}{2} + 1\right] \mathrm{d}x$. D'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale :

$\mathscr{A} = \frac{1}{2}(\ln(2) - 1) \left[-\dfrac{x^3}{6} + x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \dfrac{1}{2}(\ln(2) - 1) - \dfrac{1}{6} + 1 + \dfrac{1}{48} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\ln(2) - \dfrac{7}{48}$

$\approx 0,2$ (u. a.). Effectivement l'aire de la partie hachurée représente à peu près 20 carreaux sur 100.



Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On reconnaît une similitude de centre O.

   D'autre part $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(-1 + \mathrm{i})$ est un complexe dont le carré du module est égal à $\dfrac{2}{16} + \dfrac{2}{16} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$. Son module est donc égal à $\dfrac{1}{2}$.

   On a donc $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(-1 + \mathrm{i}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

   f est donc une similitude composée de l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$ et de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

   a. Par récurrence :

   - Initialisation :
     $z' = z_1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$: c'est ce que l'on a démontré à la question précédente.
   - Hérédité :
     Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.

     Alors $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} z_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3(n+1)\pi}{4}\right)}$.

     La formule est vraie au rang $n+1$. Elle est donc vraie pour tout naturel n.

   b. Voir la figure

M_n a pour affixe z_n qui a pour argument $\dfrac{3n\pi}{4}$;

M_p a pour affixe z_p qui a pour argument $\dfrac{3p\pi}{4}$;

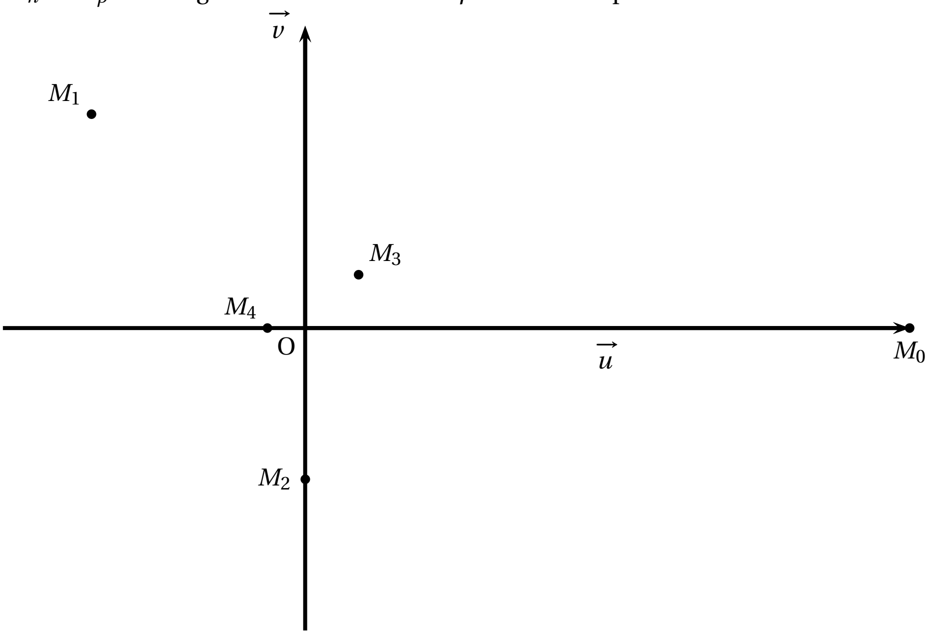
M_n et M_p sont alignés avec O si leurs arguments sont égaux à 0 modulo π, soit :

$\dfrac{3n\pi}{4} = \dfrac{3p\pi}{4} \quad [\pi] \iff \dfrac{3n}{4} = \dfrac{3p}{4} \quad [1] \iff n = p \quad \left[\dfrac{4k}{3}\right]$

Or $\dfrac{4k}{3} \in \mathbb{Z} \iff k = 3\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Donc finalement $n = p + 4\alpha$.

M_n et M_p sont alignés si la différence $n - p$ est un multiple de 4.



EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})\right|^2 = \dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4} = 1$, donc $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})\right| = 1$.

On a donc une similitude de rapport 1, donc une rotation.

Or $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

La transformation f est donc la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.

2. **a.** Par récurrence :

- $z_0 = 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\times 0\pi}{4}\right)}$: la formule est vraie au rang 0.
- Supposons qu'il existe un naturel k tel que $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3k\pi}{4}\right)}$.

Alors $z_{k+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3k\pi}{4}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3(k+1)\pi}{4}\right)}$: la formule est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : on a démontré par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.

b. Voir la figure plus bas.

c. M_n a pour affixe z_n dont un argument est $\frac{3n\pi}{4}$;

M_{n+8} a pour affixe z_{n+8} dont un argument est $\frac{3(n+8)\pi}{4}$.

Or $\frac{3(n+8)\pi}{4} = \dfrac{(3n+24)\pi}{4} = \dfrac{3n\pi}{4} + \dfrac{24\pi}{4} = \dfrac{3n\pi}{4} + 6\pi$.

On a donc $\arg(z_n) = \arg(z_{n+8}) \quad [2\pi]$

Comme z_n et z_{n+8} ont le même module et un même argument, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. Par la rotation f, le triangle $M_7M_0M_1$ a pour image le triangle $M_8M_1M_2$, soit d'après la question précédente (puisque $M_8 = M_0$) le triangle $M_0M_1M_2$.

Comme la rotation est une isométrie, elle conserve les longueurs, donc les aires : les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire.

Le point M_1 a pour coordonnées $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

On a donc $M_1M_7 = \sqrt{2}$ et la hauteur du triangle $M_7M_0M_1$ issue de M_0 a pour longueur $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

L'aire de ce triangle est donc égale à : $\dfrac{\sqrt{2} \times \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.