# Vocalulaire de la logique et théorie des ensembles

Paul Milan

LMA le 2 mars 2010

## Table des matières



## 1 Introduction

Le raisonnement mathématique obéit à une logique. Depuis l'adoption des mathématiques modernes à l'école, on a mis en application les recherches sur la logique du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Ainsi sont apparus des nouveaux symboles comme : $\Rightarrow$ , $\Leftrightarrow$ , $\forall$ , $\exists$ qu'un mathématicien utilise maintenant couramment. Mais ces symboles sont souvent utilisés comme abréviation sans en connaître leur véritable signification. L'objet de ce paragraphe est de définir puis de donner quelques exemples pour clarifier leur utilisation. Avant de commencer il faut savoir que les mathématiques sont fondées sur une dualité c'est à dire qu'une proposition est soit fausse soit vraie. Il n'y a pas d'entre deux, c'est à dire qu'une proposition " à moitié vraie " ou "presque vraie" est considérée comme fausse. Cependant qu'est-ce que la logique ?

> *La logique mathématique diffère de la logique formelle philosophique. Science de la démonstration, la logique mathématique consiste surtout en l'étude des rapports formels existant entre les propositions indépendamment de toute interprétation que l'on pourrait en donner ou des valeurs de vérité que l'on peut leur attribuer.*
>
> DICTIONNAIRE DES MATHÉMATIQUES *Édition Puf.*

La deuxième partie de ce chapitre a pour but de rappeler certaines notions élémentaires sur les opérations logiques avec les ensembles, le vocabulaire et les signes mathématiques qui s'y rattachent. Il est important d'assimiler ces termes et définitions afin de pouvoir d'avantage formaliser le langage mathématique. Votre expression mathématique gagnera en précision et votre compréhension du langage mathématique s'améliorera. De plus cette formulation mathématique vous fera gagner du temps et de la rigueur.

# 2 Les connecteurs logiques

## 2.1 Expression, proposition, axiome et théorème

**Définition 1** *Une **expression** est un ensemble de signes (lettres, chiffres, symboles, mots, etc.) possédant une signification dans un univers donné.*

Exemple

En algèbre « $3x^2 + 4x - 5$ »
En géométrie « $ABC$ un triangle »

**Définition 2** *Une **proposition** propose l'expression d'un fait. Une proposition est synonyme d'énoncé.*

Exemple

En algèbre « $3x^2 + 4x - 5 = 0$ », « $2^3 = 8$ »
En géométrie « $ABC$ est un triangle équilatéral », « $ABCD$ est un losange ».

On peut composer des expressions ou des propositions en utilisant certains mots ou certains symboles possédant une signification tels que les connecteurs logiques (connecteurs propositionnels) et les quantificateurs.

On répartit les propositions en deux catégories : les axiomes et les théorèmes.

**Définition 3** *Un **axiome** est une proposition dont on **admet** qu'elle est vraie.*
*Un **théorème** est une proposition dont il faut **établir** la véracité. Un théorème est donc vrai s'il se déduit logiquement d'axiomes.*

Exemple

Un axiome
« Par un point extérieur à une droite, on ne peut tracer qu'une parallèle. » (5ème postulat d'Euclide)
Un théorème
« Un triangle est rectangle si et seulement le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. » (théorème de Pythagore)

## 2.2 La négation : le connecteur logique NON

**Définition 4** *Nier une proposition, c'est passer de la définition d'une partie d'un ensemble à la définition de son complémentaire.*
*Son symbole est ¬ qui se place devant la proposition. C'est le seul connecteur qui porte sur une seule proposition.*

Quelques exemples :

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| $x > 4$ | $x \leqslant 4$ |
| $x \in \mathbb{N}$ | $x \notin \mathbb{N}$ |
| $A$, $B$, $C$ alignés | $ABC$ triangle |
| $(D)$ et $(D')$ secantes | $(D)$ // $(D')$ |

Du fait du principe de dualité, c'est à dire qu'une proposition est soit vraie soit fausse, on a donc : soit la proposition $P$ est vraie soit la proposition $\neg P$ est vraie. Pour analyser les différents cas possibles, on a l'habitude de présenter les connecteurs logiques à l'aide de tables appelées « tables de vérité » . La table de vérité du connecteur NON sera donc :

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| Vrai | Faux |
| Faux | Vrai |

Si on utilise une notation informatique on remplaçant Vrai par 1 et Faux par 0 on obtient alors :

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

## 2.3 La conjonction : le connecteur logique ET

**Définition 5** *Le connecteur logique ET porte sur deux propositions. La proposition (P et Q) notée $P \wedge Q$ est vrai si les deux propositions $P$ et $Q$ sont simultanément vraies, la proposition $P \wedge Q$ est fausse dans tous les autres cas.*

On a la table de vérité suivante :

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| Vrai | Vrai | Vrai |
| Vrai | Faux | Faux |
| Faux | Vrai | Faux |
| Faux | Faux | Faux |

Quelques exemples :

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| $x < 10$ | x>2 | $x \in ]\,2\,;\,10\,[$ |
| $ABCD$ losange | $ABCD$ rectangle | $ABCD$ carré |

## 2.4 La disjonction : le connecteur logique OU

**Définition 6** *Le connecteur logique OU porte sur deux propositions. La proposition (P ou Q) notée $P \vee Q$ est fausse si les deux propositions sont simultanément fausses, la proposition $P \vee Q$ est vraie dans tous les autres cas.*

On a la table de vérité suivante :

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| Vrai | Vrai | Vrai |
| Vrai | Faux | Vrai |
| Faux | Vrai | Vrai |
| Faux | Faux | Faux |

Quelques exemples :

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| $x < 2$ | $x > 10$ | $x \in ]-\infty\,;\,2\,[\cup]10\,;\,+\infty[$ |
| $n$ multiple de 3 inférieur à 10 | $n$ pair inférieur à 10 | $n \in \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ |

Remarque

On peut exprimer le connecteur OU à l'aide des connecteurs ET et NON :

$$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

Pour s'en convaincre voici la table de vérité montrant ceci :

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg P \wedge \neg Q$ | $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Vrai | Vrai | Faux | Faux | Faux | Vrai |
| Vrai | Faux | Faux | Vrai | Faux | Vrai |
| Faux | Vrai | Vrai | Faux | Faux | Vrai |
| Faux | Faux | Vrai | Vrai | Vrai | Faux |

## 2.5 L'implication : le connecteur logique Si... alors

**Définition 7** *Le connecteur logique Si ... alors, porte sur deux propositions. La proposition (Si $P$ alors $Q$) notée $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque l'on a simultanément la proposition $P$ vraie et la proposition $Q$ fausse, la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie dans tous les autres cas.*

On a la table de vérité suivante :

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| Vrai | Vrai | Vrai |
| Vrai | Faux | Faux |
| Faux | Vrai | Vrai |
| Faux | Faux | Vrai |

Quelques exemples :

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| $x = -2$ | $x^2 = 4$ | Si $x = -2$ alors $x^2 = 4$ |
| $ABC$ équilatéral | $ABC$ isocèle | Si $ABC$ équilatéral alors $ABC$ isocèle |

Remarque

On peut exprimer le connecteur logique : Si ... alors, à l'aide des connecteurs OU et NON :

$$P \Rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

Pour s'en convaincre voici la table de vérité montrant ceci :

| $P$ | $\neg P$ | $Q$ | $\neg P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| Vrai | Faux | Vrai | Vrai |
| Vrai | Faux | Faux | Faux |
| Faux | Vrai | Vrai | Vrai |
| Faux | Vrai | Faux | Vrai |

Lorsque l'on a $P \Rightarrow Q$ on dit que Q est une **condition nécessaire** à $P$ et que $P$ est une **condition suffisante** à $Q$. Si nous reprenons notre exemple de triangle, un triangle équilatéral est nécessairement isocèle. En effet un triangle équilatéral est au moins isocèle. Par contre pour montrer qu'un triangle est isocèle, il est suffisant qu'il soit équilatéral mais cela n'est pas nécessaire.

La structure d'un théorème obéit à la structure Si ... alors. En effet il se décompose en deux parties : les hypothèses (proposition $H$) puis les conclusions (proposition $C$). Si le théorème est démontré alors on a $H \Rightarrow C$. Pour montrer qu'un théorème est faux, il suffit de montrer, par un contre-exemple, qu'il existe un cas où $H$ est vrai avec $C$ faux.

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ il est parfois plus facile de démontrer que, si l'on n'a pas $Q$ alors on n'a pas $P$. Cela s'appelle **la contraposée** :

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

Cela revient à dire que : si le triangle n'est pas isocèle, il n'est pas équilatéral.

Montrons cette propriété grâce à une table de vérité :

| $P$ | $Q$ | $\neg Q$ | $\neg P$ | $\neg Q \Rightarrow \neg P$ |
|---|---|---|---|---|
| Vrai | Vrai | Faux | Faux | Vrai |
| Vrai | Faux | Vrai | Faux | Faux |
| Faux | Vrai | Faux | Vrai | Vrai |
| Faux | Faux | Vrai | Vrai | Vrai |

### 2.6 L'équivalence logique : le connecteur logique Si et seulement si

Le connecteur logique **Si et seulement si** porte sur deux propositions. La proposition ($P$ si et seulement si $Q$) notée $P \Leftrightarrow Q$ est vrai lorque l'on a simultanément $P$ et $Q$ vraies ou fausses. La propostion est fausse dans les autres cas. On a la table de vérité suivante :

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| Vrai | Vrai | Vrai |
| Vrai | Faux | Faux |
| Faux | Vrai | Faux |
| Faux | Faux | Vrai |

Pour qu'une équivalence soit vraie, il faut avoir : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

Quelques exemples :

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| $x^2 = 4$ | $x = 2$ ou $x = -2$ | $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ |
| $ABC$ triangle rectangle en $A$ | $BC^2 = AB^2 + AC^2$ | $ABC$ rectangle en A $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ |

Pour démontrer une équivalence logique, on procèdera souvent en deux étapes :

1. $P \Rightarrow Q$
2. $Q \Rightarrow P$

C'est le cas du deuxième exemple qui correspond au théorème de Pythagore et à sa réciproque.

Remarque

Lorque l'on a $P \Leftrightarrow Q$, on dit que $P$ est une **condition nécessaire et suffisante** de $Q$ et inversement.

## 3 Les quantificateurs

### 3.1 Le quantificateur universel

**Définition 8** *Un quantificateur permet de préciser le domaine de validité d'une proposition. Le symbole $\forall$ qui signifie « **quel que soit** » ou « **pour tout** » représente le quantificateur universel. Ce symbole représente la lettre « A » renversée qui est l'initiale du mot anglais « All ». Il doit toujours être suivi du signe d'appartenance $\in$.*

Exemple

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; x^2 \geqslant 0$$

« quelque soit $x$ appartenant à $\mathbb{R}$, $x^2$ est positif ou nul »

## 3.2 Le quantificateur existentiel

**Définition 9** *Le symbole $\exists$ qui signifie « il existe au moins un ... tel que » représente le quantificateur existentiel. Ce symbole représente la lettre « E » renversée qui est l'initiale du mot anglais « exist ». On peut éventuellement rajouter un point d'exclamation pour montrer l'unicité. On a alors : $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ... tel que ».*

Exemple

$$\exists!\ x \in [0;1], \quad x^2 + 4x + 1 = 0$$

« Il existe un unique $x$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ tel que : $x^2 + 4x + 1 = 0$ »

## 3.3 Propriétés des quantificateurs

### 3.3.1 L'ordre des quantificateurs

L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs change la signification :

Exemple

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \exists\ y \in \mathbb{R}, \quad y > x$$

« Quel que soit le réel $x$, il existe au moins un réel $y$ tel que $y$ soit supérieur à $x$ »

On peut toujours trouver un nombre supérieur à un nombre réel donné car l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas borné. La proposition est vraie.

Inversons maintenant les quantificateurs

$$\exists\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ y \in \mathbb{R}, \quad y > x$$

« Il existe au moins un réel $x$ tel que pour tout réel $y$, $y$ soit supérieur à $x$ »

Cette proposition cette fois est fausse car on ne peut trouver un réel inférieur à tous les autres. En effet l'ensemble $\mathbb{R}$ n'a pas de borne inférieur.

### 3.3.2 Négation d'une proposition universelle

**Définition 10** *Une proposition universelle s'énonce : « Pout tout élément $x$ d'un ensemble $E$, $x$ possède la proposition $P$ ». Sa négation sera : « il existe au moins un élément $x$ de l'ensemble $E$ qui ne possède pas la propriété $P$ ».*

Exemple

Soit la proposition
« Tous les lecteurs de ce chapitre comprennent tout ce qui est écrit »
Sa négation sera donc :
« Il existe au moins un lecteur qui ne comprend pas ce chapitre »

Pour démontrer qu'une proposition universelle n'est pas vraie, il suffit donc de trouver un seul $x$ qui ne vérifie pas la proposition $P$. C'est ce qu'on nomme un « **contre-exemple** ». Lorsque l'on énonce une proposition, on cherche un contre exemple pour tester si cette proposition peut être vraie. Si aucun contre-exemple ne vient, il reste à démontrer la proposition ce qui s'avère souvent bien plus difficile.

### 3.3.3 Négation d'une proposition existentielle

**Définition 11** *Une proposition existentielle s'énonce : « Il existe au moins un élément $x$ de l'ensemble $E$ qui possède la propriété $P$ ». Sa négation sera : « Pour tout élément $x$ de l'ensemble $E$, $x$ ne vérifie pas $P$ ».*

Exemple

Soit la proposition $P$ :

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = -1$$

Cette proposition est fausse car un carré ne peut être négatif.
Par contre sa négation est vraie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \neq -1$$

# 4 Théorie des ensembles

## 4.1 Définitions

### 4.1.1 Ensemble

**Définition 12** *Un **ensemble** est une collection d'éléments que l'on peut énumérer ou définir par une propriété. On représente souvent un ensemble par une majuscule (A, B, C, …). Certains ensembles ont des notations particulières (ex. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)*
*Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble, on dit que cet ensemble est défini par **extension**, lorsqu'on définit un ensemble par une propriété, on dit que cet ensemble est défini par **compréhension**.*
*Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle : **l'ensemble vide** noté « $\varnothing$ ».*

**Exemples**

Soit $A$ l'ensemble des chiffres impairs et $B$ l'ensemble des points d'un dé à jouer. On peut définir $A$ et $B$ par extension :

$$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$$

$$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Lorsque le nombre des éléments d'un ensemble devient trop important ou qu'il y a un nombre infini d'éléments, on ne peut le définir que par compréhension. Soit $C$ l'ensemble des nombres d'une grille de Loto et $D$ d'ensemble des entiers naturels multiples de 3 :

$$C = \{\ x \in \mathbb{N}\ /\ 1 \leqslant x \leqslant 49\ \}$$

$$D = \{\ x \in \mathbb{N}\ /\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ x = 3k\ \}$$

Le slash / signifie « tel que ».

**Remarque**

La définition par compréhension peut cacher des "pièges" pour les mathématiciens. On peut à l'aide d'une propriété rendre l'ensemble paradoxal.
L'anglais Bertrand Russel (1872-1970) a proposé un tel ensemble popularisé sous la forme du paradoxe des catalogues : un libraire décide de faire le catalogue $K$ des catalogues qui ne sont pas catalogués. Le catalogue $K$ devra-t-il figurer dans ce nouveau catalogue ?
Si $K$ se contient, il est donc catalogué et ne peut y figurer. Si $K$ ne se contient pas, il doit y figurer. Ceci est contradictoire, le catalogue $K$ est donc inclassable, il est donc paradoxal.

### 4.1.2 Élement

**Définition 13** *Un ensemble est constitué d'élements. On représente souvent un élément par un minuscule. On dit qu'un élément « a » appartient à un ensemble A. On écrit alors :*

$$a \ \in \ A$$

*Notez le symbole* $\in$ *signifiant « appartient à » est initiale de « element ».*

### 4.1.3 Sous-ensemble

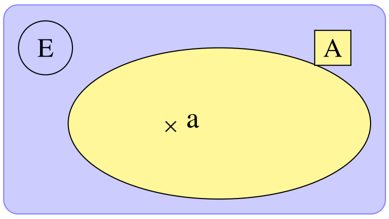
**Définition 14** *On dit qu'un ensemble A est un sous-ensemble de l'ensemble E si et seulement si tout élément de A est élément de E ou si* $A = \varnothing$*. On dit alors que A est inclus dans E.*

$$A \subset E \ \Leftrightarrow\ \forall a \in A\,,\ a \in E \quad ou \quad A = \varnothing$$

*Le symbole* $\subset$ *signifie « inclus dans ».*

Remarque

On peut visualiser cette propriété par un diagramme de Venn




## 4.2 Complémentaire d'un ensemble

**Définition 15** *On appelle complémentaire de l'ensemble A dans l'ensemble E, l'ensemble noté $\complement_E(A)$ composé des éléments de E qui ne sont pas élément de A. Le complémentaire correspond au connecteur NON. On a alors :*

$$a \in \complement_E(A) \Leftrightarrow a \in E \quad et \quad a \notin A$$

*Le symbole $\notin$ signifie « n'appartient pas à ».*
*Lorsque l'ensemble E est implicite, on note le complémentaire de A :*

$$\overline{A} \quad \text{qui se prononce « A barre »}$$

Exemples

Soit $E$ l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 et soit $A$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 20. On a donc :

$$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$$

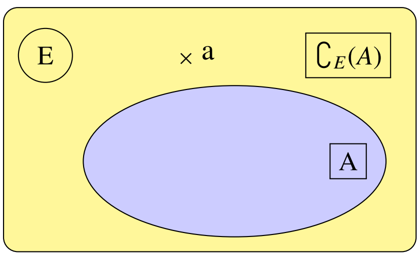
L'ensemble $\complement_E(A)$ sera donc l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 qui ne sont pas premiers. On a donc :

$$\complement_E(A) = \{0,\ 1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$$

Soit l'ensemble $P$ des entiers naturels pairs. L'ensemble $\mathbb{N}$ est ici implicite. On aura donc $\overline{P}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.

Remarque

On peut visualiser le complémentaire de $A$ dans $E$ par le diagramme de Venn suivant :



## 4.3 Intersection de deux ensembles

**Définition 16** *On appelle intersection de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble E, l'ensemble noté : $A \cap B$ (A inter B) constitué des éléments communs à A et B. On a donc :*

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

**Exemple**

Soit $A$ l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 20 et soit $B$ l'ensemble des entiers naturels multiples de 3 inférieurs ou égaux à 20. on a donc :

$$A = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$$

$$B = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$$

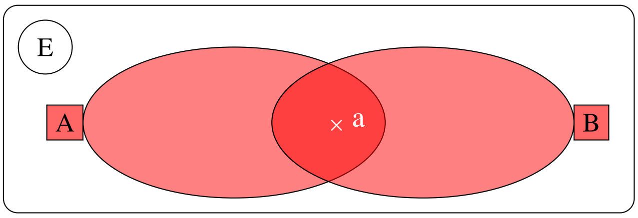
On a donc :

$$A \cap B = \{0,\ 6,\ 12,\ 18\}$$

qui n'est autre que l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 inférieurs ou égaux à 20.

**Remarques**

1. On peut visualiser l'intersection de deux ensembles $A$ et $B$ par le diagramme de Venn suivant :




2. Lorsque l'ensemble $A$ est inclus dans l'ensemble $B$, on a alors :

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

3. Lorsque les ensembles $A$ et $B$ sont disjoints, ils ne possèdent aucun élément commun, leur intersection est donc vide, on a donc :

$$A \cap B = \varnothing \iff A \text{ et } B \text{ sont disjoints}$$

C'est le cas avec l'ensemble $A$ et sont complémentaire $\overline{A}$, on a donc : $A \cap \overline{A} = \varnothing$

## 4.4 Union de deux ensembles

**Définition 17** *On appelle union de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble E, l'ensemble noté : $A \cup B$ (A union B) constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B (éventuellement aux deux, le « ou » étant non exclusif). On peut alors écrire :*

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

Exemple

Soit $A$ l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 20 et soit $B$ l'ensemble des entiers naturels multiples de 3 inférieurs ou égaux à 20. on a donc :

$$A = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$$

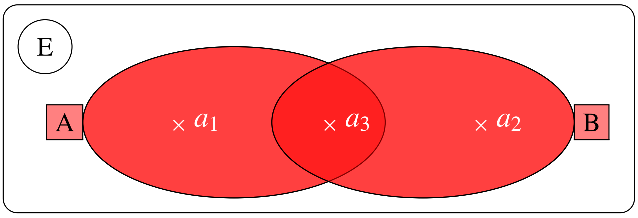
$$B = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$$

On a donc :

$$A \cup B = \{0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$$

Remarques

1. On peut visualiser l'union de deux ensembles $A$ et $B$ par le diagramme de Venn suivant :




2. Lorsque l'ensemble $A$ est inclus dans l'ensemble $B$, on a alors :
$$A \subset B \ \Rightarrow\ A \cup B = B$$
3. L'union de l'ensemble $A$ et de son complémentaire $\overline{A}$ donne l'ensemble $E$, c'est à dire : $A \cup \overline{A} = E$

## 4.5 Lois De Morgan

**Règle 1** *Soit A et B deux sous-ensembles de l'ensemble E. On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les complémentaires respectifs des ensembles A et B dans l'ensemble E. On a alors :*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \textit{et} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

*Le complémentaire de l'intersection est égal à l'union des complémentaires et le complémentaire de l'union est égal à l'intersection des complémentaires*

Exemple

Le complémentaire se traduit en français par une négation. L'union et l'intersection se traduisent respectivement par les mots « ou » et « et ». Ainsi la négation de la phrase :
« je vais au théatre ou au cinéma »
se traduit, grâce à notre règle par :
« je ne vais pas au théatre et je ne vais pas au cinéma »
que l'on peut aussi traduire par :
« je ne vais ni au théatre ni au cinéma »

Remarque

On peut démontrer ces lois facilement grâce à une table de vérité.

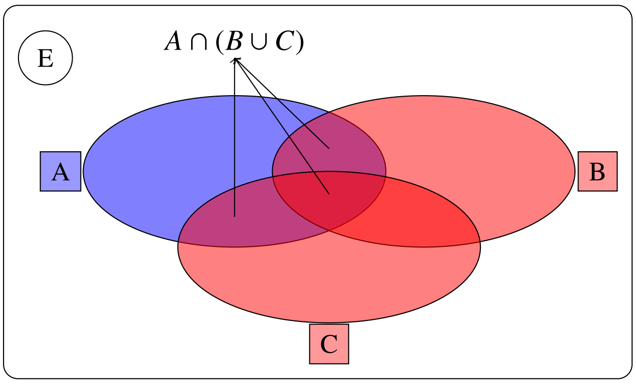
## 4.6 Distributivité

**Règle 2** *Soit trois sous-ensembles A, B et C d'un ensemble E. on a alors les égalités suivantes :*

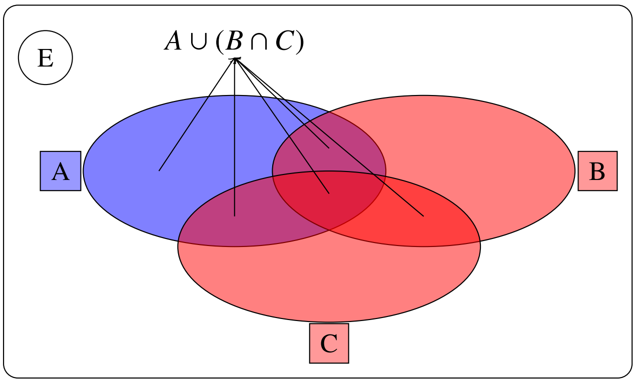
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \textit{et} \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

**Remarque**

On peut visualiser par un diagramme de Venn : $A \cap (B \cup C)$




Visualisation : $A \cup (B \cap C)$




On peut démontrer ces deux égalités par une table de vérité !

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \cup C$ | $A \cap (B \cup C)$ | $A \cap B$ | $A \cap C$ | $(A \cap B) \cup (A \cap C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \cap C$ | $A \cup (B \cap C)$ | $A \cup B$ | $A \cup C$ | $(A \cup B) \cap (A \cup C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |