Tout le programme de Première ES

1 Pourcentage

- Prendre un pourcentage t % d'un quantité a : $\boxed{a \times \dfrac{t}{100}}$
- Calculer le pourcentage d'une quantité a par rapport à une quantité b : $\boxed{\dfrac{a}{b} \times 100}$
- Le coefficient multiplicateur CM pour une augmentation a : $\boxed{CM = 1 + \dfrac{a}{100}}$
- Le coefficient multiplicateur CM pour une réduction r : $\boxed{CM = 1 - \dfrac{r}{100}}$
- On calcul le pourcentage d'évolution d'une quantité par : $\boxed{\dfrac{\text{Valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100}$
- Une quantité A augmentée n fois successivement d'un même pourcentage t devient : $\boxed{A \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^n}$
- Une quantité A diminué n fois successivement d'un même pourcentage t devient : $\boxed{A \times \left(1 - \dfrac{t}{100}\right)^n}$

2 Statistiques

La **médiane** Me d'une série statistique est la valeur de la variable qui partage l'effectif total en deux parties égales.

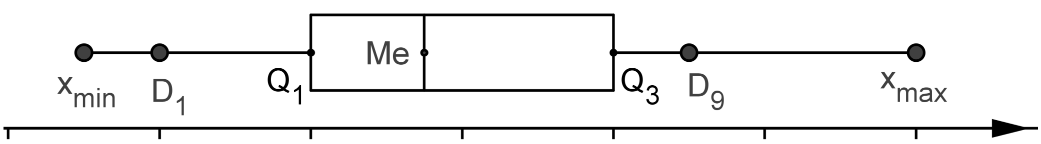
Le **quartile** Q_1 est la plus petite valeur de la variable telle qu'au moins 25 % des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.

Le **quartile** Q_3 est la plus petite valeur de la variable telle qu'au moins 75 % des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.

Le **décile** D_1 est la plus petite valeur de la variable telle qu'au moins 10 % des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales. Le **décile** D_9 est la plus petite valeur de la variable telle qu'au moins 90 % des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.

On définit **l'écart interquartile** par : $Q_3 - Q_1$ et **l'intervalle interquartile** par $[Q_1\ ;\ Q_3]$

Le **diagramme en boîtes** représente une série statistique ainsi que sa médiane, ses quartiles et ses valeurs extrêmes (éventuellement les déciles) :



3 Probabilités

L'univers Ω est l'ensemble des résultats possible d'une expérience aléatoire. Un **événement** A est une partie de Ω.

Pour tout événement A, $\boxed{0 \leqslant P(A) \leqslant 1}$. On a $\boxed{P(\varnothing) = 0}$ et $\boxed{P(\Omega) = 1}$

La somme des probabilités des événement élémentaires vaut 1. $\boxed{p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1}$

La probabilité d'un événement est égale à la somme des propabilité des événements élémentaires qui le composent.

Dans le cas d'équiprobabilité, $\boxed{P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{\text{Nbre de cas favorables}}{\text{Nbre de cas possibles}}}$.

Pour deux événements A et B, $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Si les événéments sont incompatibles ($A \cap B = \varnothing$) alors $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire et $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

4 Algèbre

4.1 Le second degré

$P(x) = ax^2 + bx + c$ le trinôme du second degré. Le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$,
l'équation $P(x) = 0$ admet **deux racines** réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Factorisation :

$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Le **signe** de $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de$-a$ à l'intérieur.

Si $\Delta = 0$,
l'équation $P(x) = 0$ admet **une unique racine** réelle « double » :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Factorisation :

$P(x) = a(x - x_0)^2$

Le **signe** de $P(x)$ s'annule en x_0 et est du signe de a ailleurs.

Si $\Delta < 0$,
l'équation $P(x) = 0$ **n'admet pas de racine** réelle

On **ne peut pas factoriser** $P(x)$

Le **signe** de $P(x)$ est du signe de a.

4.2 Domaine de définition d'une fonction

Il faut exclure les valeurs qui annulent le dénominateur.

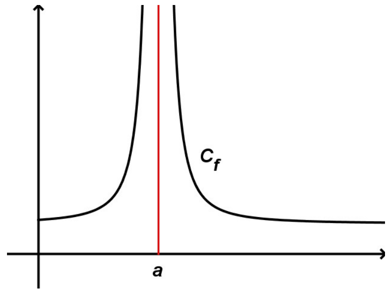
$\sqrt{u(x)}$ existe ssi $u(x) \geqslant 0$

4.3 Limites et asymptotes

On étudie les limites d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition. On peut utiliser alors :

- Les limites des fonctions élémentaires : ($\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$)
- Les limites de comparaison (théorème des gendarmes)
- Les opérations sur les limites (somme, produit et quotient). Attention aux formes indéterminées $\left(+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \dfrac{\infty}{\infty} \quad \text{et} \quad \dfrac{0}{0} \right)$
- La limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est celle de son terme du plus haut degré.
- La limites en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle est celle de son quotient simplifié des termes du plus haut degré.
- Les limites par croissance comparées (cf exponentielle et logarithmes)

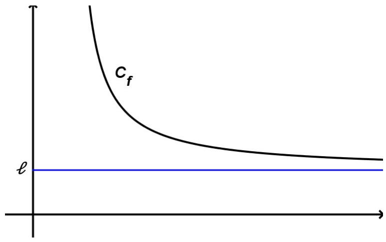
Asymptote verticale



Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

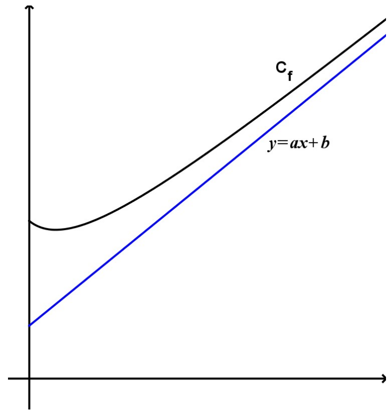
Il faut en général étudier la limite à gauche et à droite de a.

Asymptote horizontale



Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$.

Asymptote oblique



Si $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$, $-\infty$.

Position relative : il faut étudier le signe de $f(x) - (ax+b)$.

4.4 Dérivée

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est **strictement croissante** sur I.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est **strictement décroissante** sur I.

Fonction	Dérivée	D'_f
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

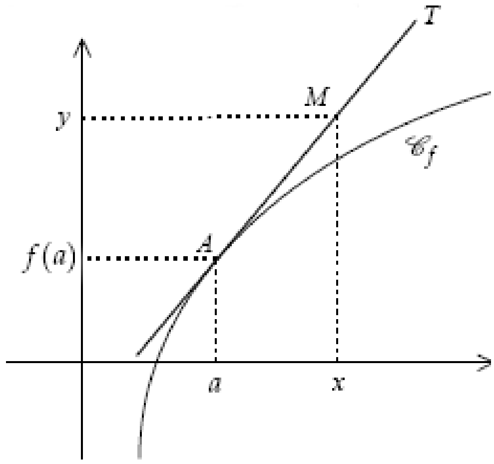
Dérivée	Formule
de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
de ku	$(ku)' = ku'$
du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
du quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
de la racine	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

4.5 Représentation de la fonction et du nombre dérivé

Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

Le coefficient directeur de la tangente est la valeur du nombre dérivé. Ce coefficient se lit sur la courbe en calculant le quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



5 Suite

Suites arithmétiques (utilisées pour des variations absolues)	Suite géométriques (utilisées pour des variations relatives (en %)
Définition : $u_{n+1} = u_n + r$ et un premier terme. r est la raison **Terme général :** $u_n = u_0 + nr \quad$ ou $\quad u_n = u_p + (n-p)r$ **Somme des termes :** $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$ D'une façon générale : $S_n = \text{Nbre de termes} \times \dfrac{\Sigma \text{ termes extrèmes}}{2}$	**Définition :** $u_{n+1} = q \times u_n$ et un premier terme. q est la raison **Terme général :** $u_n = u_0 \times q^n \quad$ ou $\quad u_n = u_p \times q^{n-p}$ **Somme des termes :** $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ D'une façon générale : $S_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{Nbre de termes}}}{1 - q}$

Limites de suites : On examine le comportement des termes u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On dit que la suite (u_n) **converge**, si la limite des termes u_n est finie soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Dans tous les autres cas, on dit que la suite (u_n) **diverge** : soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ n'existe pas (exemple $(-1)^n$)

Thèorème : Une suite **géométrique** de raison q :

- Converge vers 0 si $-1 < q < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Diverge vers $\pm\infty$ si $q > 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- est constante si $q = 1$
- n'admet pas de limite si $q \leqslant -1$