Les pourcentages

Table des matières

1 Les pourcentages instantannés

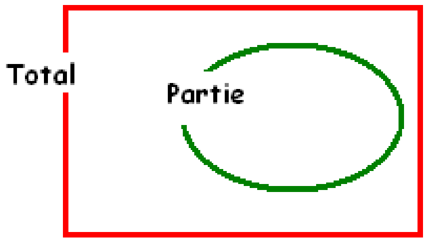
Définition 1 :

Étant donné un nombre réel positif a, le quotient $a/100$ est encore noté $a\,\%$. Cette écriture lue "a pour cent" est appelée un pourcentage. Les pourcentages sont utilisés en statistiques, en mathématiques financières et économiques.

Exemples : $15\,\% = \dfrac{15}{100} = 0,15$ ou encore $4,5\,\% = \dfrac{4,5}{100} = 0,045$

1.1 Déterminer un pourcentage

Lorsque l'on cherche à déterminer l'importance de la partie dans le total, nous pouvons utiliser deux paramètres. Soit la part qui est le rapport de la partie sur le total, soit la part en poucentage qui correspond à ce rapport multiplié par 100.



$$\text{Part} = \frac{\text{Partie}}{\text{Total}}$$

$$\text{Pourcentage} = \frac{\text{Partie}}{\text{Total}} \times 100$$

Exemple : Dans une classe de 1$^{\text{re}}$ L de 35 élèves, il y a 14 garçons. Calculer la part et le pourcentage de garçon dans la classe

Le total ici représente la classe soit 35 et la partie représente les garçons soit 14, on a donc :

$$\text{Part} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Pourcentage} = \frac{14}{35} \times 100 = 0,4 \times 100 = 40\%$$

1.2 Prendre un pourcentage

Cette fois nous connaissons la part ou le pourcentage et le total. Nous cherchons la partie.

$$\text{Partie} = \text{Part} \times \text{Total}$$

$$\text{Partie} = \frac{\text{Pourcentage}}{100} \times \text{Total}$$

Exemples : Sur les 300 élèves que compte un établissement, 12% sont des élèves de 1^re^ L. Dans cette classe de 1^re^ L , un quart des élèves étudient l'allemand. Quel est le nombre d'élèves de 1^re^ L et le nombre de ceux-ci qui étudient l'allemand ?

$$\text{Nombre d'élèves de 1}^{\text{re}}\text{ L} = \frac{12}{100} \times 300 = 36$$

$$\text{1}^{\text{re}}\text{ L qui étudient l'allemand} = \frac{1}{4} \times 36 = 9$$

1.3 Déterminer le total

Souvent le plus simple pour calculer le total connaissant la partie et le pourcentage, est d'effectuer un tableau de proportionnalité.

Pourcentage	Partie
100%	Total

$$\text{Total} = \frac{\text{Partie} \times 100}{\text{Pourcentage}}$$

Exemple : Dans un groupe de touristes, il y a 35 touristes belges qui représente 14% du groupe. Quel est le nombre de touristes dans ce groupe ?

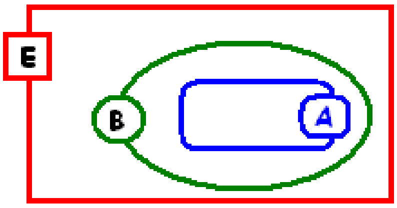
Remplissons un tableau de proportionnalité

14%	35
100%	Nbre de touristes

$$\text{Nbre de touristes} = \frac{35 \times 100}{14} = 250$$

1.4 Pourcentage de pourcentage

On parle de pourcentage de pourcentage lorsque la partie contient un sous-ensemble. Nous avons alors le schéma suivant :



A représente $a\,\%$ de B
B représente $b\,\%$ de E
A représente $a\,\%$ de $b\,\%$ de E

A représente donc $\dfrac{a \times b}{100}$% de E

Exemple : Dans une classe, ily a 45 % de garçon dont 80 % ont moins de 17 ans. Quelle est la proportion de garçons de moins de 17 ans dans la classe.

$$\text{Nbre de garçons de moins de 17ans} = \frac{45 \times 80}{100} = 36\,\%$$

2 Pourcentage d'évolution

On parle d'évolution lorsqu'une valeur évolue au cours de temps. On peut alors faire le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} V_i & \longrightarrow & V_f \\ \text{Valeur initiale} & & \text{Valeur finale} \end{array}$$

2.1 On connaît la valeur initiale et la valeur finiale

$$\text{Pourcentage d'évolution} = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$$

On peut définir un coefficient afin de passer de la valeur initiale à la valeur finale par une multiplication. On note ce coefficient CM (coefficient multiplicateur).

$$CM = \frac{V_f}{V_i} \quad \text{on a alors :} \quad V_f = CM \times V_i$$

Exemples :

1. La population d'une ville passe en 10 ans de 56 000 à 91 000 habitants. Quel est le pourcentage d'augmentation de la population? Calculer le coeficient multiplicateur.

$$\text{Evolution en \%} = \frac{91\ 000 - 56\ 000}{56\ 000} \times 100 = \frac{35\ 000 \times 100}{56\ 000} = 62,5\,\%$$

Il s'agit d'une augmentation de 62,5 %.

$$CM = \frac{91\ 000}{56\ 000} = 1,625$$

2. Le prix d'un téléviseur de 1560 € a été soldé à 1365 € . Quel est le pourcentage de réduction. Calculer le coefficient multiplicateur.

$$\text{Evolution en \%} = \frac{1\ 365 - 1\ 560}{1\ 560} \times 100 = \frac{-195 \times 100}{1\ 560} = -12,5\,\%$$

Il s'agit donc d'une remise de 12,5 %.

$$CM = \frac{1\ 365}{1\ 560} = 0,875$$

Remarques :

1. Pour le pourcentage d'évolution, on divise toujours par la valeur initiale. Si le pourcentage est positif, il s'agit d'une augmentation. Si le pourcentage est négatif , il s'agit d'une réduction

2. Synomymes d'augmentation : hausse, inflation, ...
   Synomymes de réduction : diminution, déflation, rabais, démarque, solde, remise, ...
3. Pour une augmentation $CM > 1$ et pour une réduction $CM < 1$.

2.2 On connaît le pourcentage d'évolution et la valeur initiale

On se trouve soit dans le cas d'une augmentation soit d'une réduction. On appelle a le pourcentage d'augmentation et r le pourcentage de réduction. On obtient alors :

$$CM = 1 + \frac{a}{100} \quad \text{ou} \quad CM = 1 - \frac{r}{100}$$

$$\text{avec} \quad V_f = CM \times V_i$$

Exemples :

1. La fréquentation d'un musée subit une augmentation de 18 % de 2000 à 2007. En 2000, 110 000 personnes ont visité le musée. Quel est le nombre de visiteurs en 2007 ?

$$CM = 1 + \frac{18}{100} = 1,18$$
$$\text{Nbre de visiteurs} = 1,18 \times 110\ 000 = 129\ 800$$

2. Un ordinateur de 980 € baisse de 5 %. Quel est le nouveau prix de cet ordinateur ?

$$CM = 1 - \frac{5}{100} = 0,95$$
$$\text{Nouveau prix} = 0,95 \times 980 = 931$$

Remarque : On pourrait éventuellement calculer d'abord l'augmentation ou la réduction et l'additionner ou la soustraire à la valeur initiale.

2.3 On connaît le pourcentage d'évolution et la valeur finale

Pour calculer la valeur initiale, on divise. En effet :

$$V_i = \frac{V_f}{CM}$$

Exemple : Un prix TTC de 150 € a été obtenu à partir d'une TVA de 20 %. Déteminer le prix hors taxe ainsi que la TVA.

La TVA correspond à une augmentation, donc :

$$CM = 1 + \frac{20}{100} = 1,2$$
$$\text{Prix hors taxe} = \frac{150}{1,2} = 125$$
$$\text{TVA} = 150 - 125 = 25$$

Remarque : On ne peut pas déterminer le prix hors taxe en soustrayant 20 % du pric TTC. En effet la TVA se calcule sur le prix hors taxe. Nous devons nécessairement procéder par division.

2.4 On connaît le coefficient multiplicateur

Pour déterminer le pourcentage d'évolution à partir du coefficient multiplicateur, on applique une des formules suivantes :

$$\text{Si} \quad CM > 1 \quad \text{alors} \quad a = 100 \times (CM - 1)$$
$$\text{Si} \quad CM < 1 \quad \text{alors} \quad r = 100 \times (1 - CM)$$

Exemples :

1. Le coefficient multiplicateur est de 1,03. Quel est le pourcentage d'augmentation?
   Comme le coefficient multiplicateur est supérieur à 1, il s'agit bien d'une augmentation
   $$a = 100 \times (1,03 - 1) = 3\,\%$$
2. Le coefficient multiplicateur est de 0,92. Quel est le pourcentage de réduction?
   Comme le coefficient multiplicateur est inférieur à 1, il s'agit bien d'une réduction
   $$r = 100 \times (1 - 0,92) = 8\,\%$$

2.5 Evolutions successives

Lorsqu'une valeur subit deux évolutions successives, on peut schématiser la situation comme :

$$V_1 \xrightarrow{CM_1} V_2 \xrightarrow{CM_2} V_3$$
$$V_1 \xrightarrow{\quad CM_T = CM_1 \times CM_2 \quad} V_3$$

Pour trouver le coefficient multiplicateur global, il suffit de multiplier les coefficients multiplicateurs successifs.

$$CM_T = CM_1 \times CM_2$$

Exemples :

1. Un prix subit deux augmentations successives de 10 % et 15 %. Quel est le pourcentage total d'augmentation?

   Calculons les coefficients multipliplicateur associés aux deux augmentations :

$$CM_1 = 1 + \frac{10}{100} = 1,1 \quad \text{et} \quad CM_2 = 1 + \frac{15}{100} = 1,15$$

   Calculons le coefficient multiplicateur glogal :

$$CM_T = CM_1 \times CM_2 = 1,1 \times 1,15 = 1,265$$

   Calculons maintenant l'augmentation globale associée :

$$a = 100 \times (CM_T - 1) = 26,5\,\%$$

   On remarque que l'augmentation globale n'est pas la somme des augmentations. Cela vient du fait que la deuxième augmentation se calcule après la première augmentation c'est à dire sur une valeur plus grande.

2. Un prix subit une augmentation de 10 % suivi d'une réduction de 10 %. Quelle est l'évolution globale?

   On calcule les coefficients multiplicateurs :

$$CM_1 = 1 + \frac{10}{100} = 1,1 \quad \text{et} \quad CM_2 = 1 - \frac{10}{100} = 0,9$$

$$CM_T = CM_1 \times CM_2 = 1,1 \times 0,9 = 0,99$$

   Il s'agit d'une réduction de :

$$r = 100 \times (1 - CM_T) = 100 \times (1 - 0,99) = 1\,\%$$

   On remarque que notre première impression "le prix reste inchangé" était fausse.