Suites et croissance

Table des matières

1 Suite numérique

1.1 Définition

Définition 1 :

Une suite numérique est un ensemble de nombres auxquels on associe un rang.
On note une suite : (u_n). Le premier terme de la suite peut commencer au rang "0" soit le terme u_0 ou au rang "1" soit le terme u_1.
u_n s'appelle le terme général de la suite.

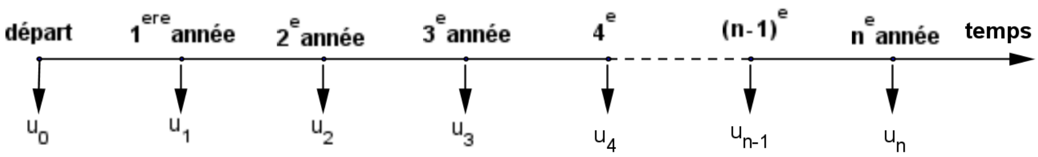
Exemple : soit la suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$2, \quad 5, \quad 8, \quad 11, \quad 14, \quad \ldots$$

On a alors :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5, \quad u_2 = 8, \quad u_3 = 11, \quad u_4 = 14, \quad \ldots$$

Application : Si n représente le nombre d'années écoulées à partir d'un date d donnée, la suite permet d'obtenir une chronologie (populations, placement, prêt, revenus, production ...).
u_0 correspondra au terme initial soit à la date d
u_1 terme au bout d'un an
u_2 terme au bout de 2 ans, et ainsi de suite ...



1.2 Croissance d'une suite

Définition 2 :

Une suite (u_n) est une suite croissante si pour tout n on a :

$$u_{n+1} > u_n$$

Une suite (u_n) est une suite décroissante si pour tout n on a :

$$u_{n+1} < u_n$$

2 Suite arithmétique

2.1 Définition

Définition 3 :

Une suite (u_n) est une suite arithmétique si elle est définie par la rela tion de récurrence suivante :

- un premier terme : u_0 ou u_1
- la relation : $u_{n+1} = u_n + r$

Le coefficient r est appelé la raison de la suite. Si la raison est positive la suite est alors croissante. Si la raison est négative la suite est décroissante.

Exemple : Un capital de 1 000 € augmente de 10 € par mois. Comment schématiser cette série chronologique ?

On crée une suite (u_n) où u_0 correspond au capital de départ soit $u_0 = 1\ 000$ et u_n au capital après n mois.

Comme le capital augmente de 10 € par mois, la relation de récurrence est :

$$u_{n+1} = u_n + 10$$

2.2 Comment reconnaître une suite arithmétique ?

Propriété 1 :

Une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs de la suite est constante. Cette constante est alors la raison de la suite

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \cdots = \text{constante}$$

Exemple : Soit la suite suivante :

$$5,\quad 8,\quad 11,\quad 14,\quad 17,\quad 20,\quad \ldots$$

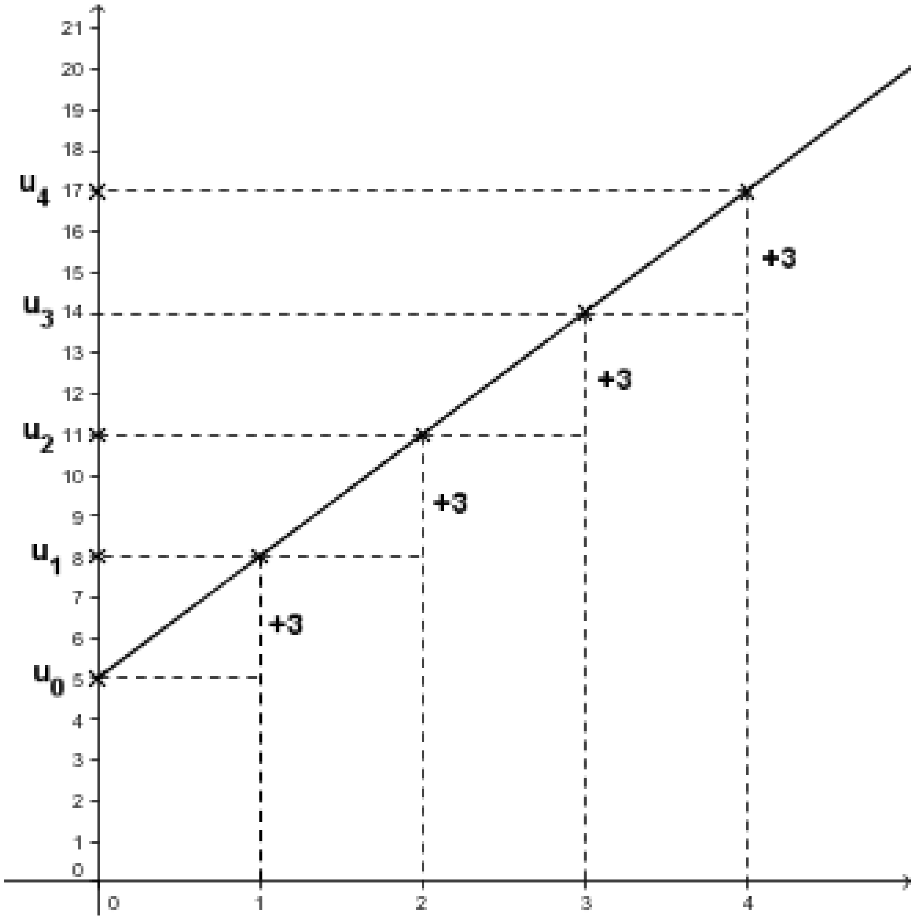
Cette suite est arithmétique car :

$$8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 17 - 14 = 20 - 17 = 3$$

Cette suite est donc une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison $r = 3$.

2.3 Croissance linéaire

Lorsque la croissance d'une quantité obéit à une suite arithmétique, on parle d'une croissance linéaire. Si l'on représente la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$, on obtient :



2.4 Expression du terme général en fonction de n

Propriété 2 :

Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est égal à :

- si le premier terme est u_0 : $u_n = u_0 + n \times r$
- si le premier terme est u_1 : $u_n = u_1 + (n-1) \times r$

Exemple : Un capital de 1 000 € augmente de 10 € par mois. Quel sera le capital au bout d'un an?

Soit la suite (u_n) où u_n représente le capital après un n mois. On pose le capital initial $u_0 = 1\ 000$. La suite est arithmétique de raison $r = 10$. Au bout d'un an : $n = 12$, donc :

$$u_{12} = 1\ 000 + 12 \times 10 = 1\ 000 + 120 = 1\ 120$$

3 Suite géométrique

3.1 Définition

Définition 4 :

Une suite (v_n)est une suite géométrique si elle est définie par la rela tion de récurrence suivante :

- un premier terme : v_0 ou v_1
- la relation : $v_{n+1} = q \times u_n$

Le coefficient q est appelé la raison de la suite. Si la raison est supérieur à 1 la suite est alors croissante. Si la raison est inférieur à 1 la suite est décroissante.

Exemple : Un capital de 1 000 € augmente de 5 % par mois. Comment schématiser cette série chronologique?

On crée une suite (v_n) où v_0 correspond au capital de départ soit $v_0 = 1\ 000$ et v_n au capital après n mois.

Comme le capital augmente de 5 % par mois. Le coefficient multiplicateur CM vaut :

$$CM = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$$

la relation de récurrence est :

$$v_{n+1} = 1,05 \times v_n$$

3.2 Comment reconnaître une suite géométrique ?

Propriété 3 :

Une suite est géométrique lorsque le rapport entre deux termes consécutifs de la suite est constant. Cette constante est alors la raison de la suite

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_2} = \cdots = \text{constante}$$

Exemple : Soit la suite suivante :

$$3,\ \ 6,\ \ 12,\ \ 24,\ \ 48,\ \ 96,\ \ \ldots$$

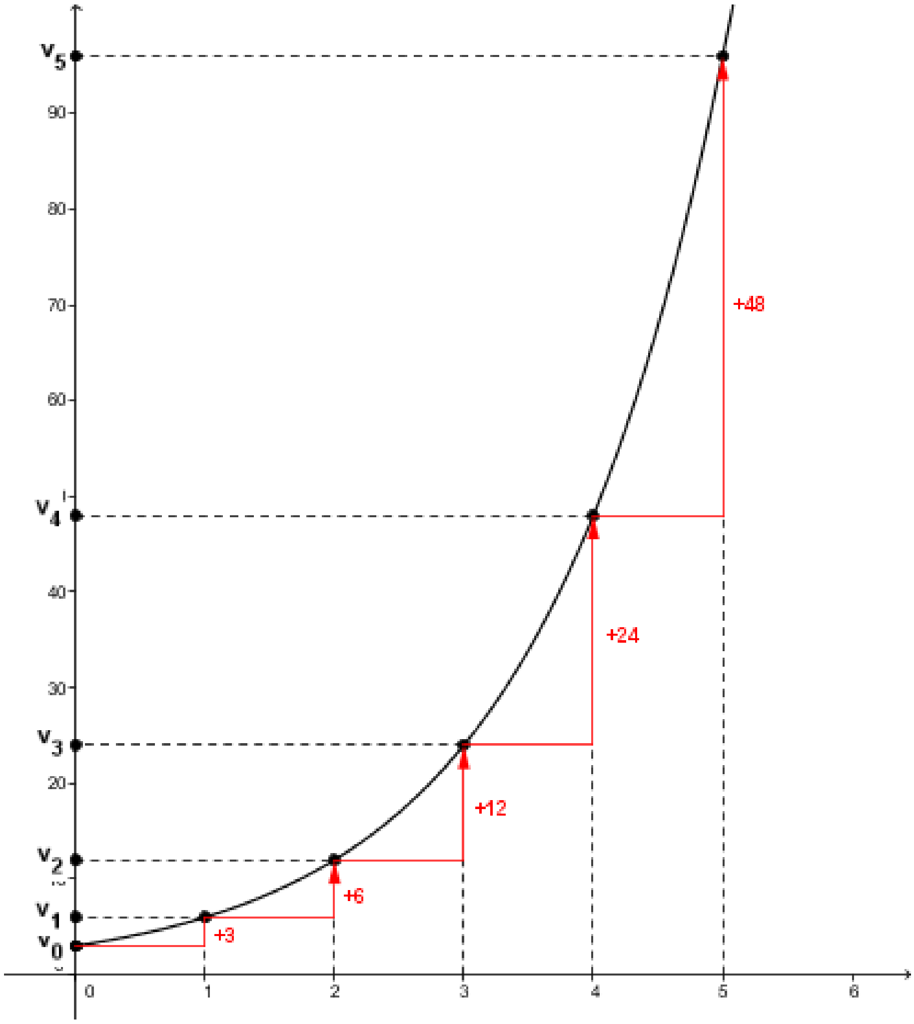
Cette suite est géométrique car :

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = 2$$

Cette suite est donc une suite géométrique de premier terme 3 et de raison $q = 2$.

3.3 Croissance exponentielle

Lorsque la croissance d'une quantité obéit à une suite géométrique, on parle d'une croissance exponentielle. Si l'on représente la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = 2$, on obtient :



On peut remarquer que la croissance de la série est de plus en plus grande, ce qui est la caractéristique de la croissance exponentielle.

3.4 Expression du terme général en fonction de n

Propriété 4 :

Le terme général d'une suite géométrique (v_n) de raison q est égal à :

- si le premier terme est v_0 : $v_n = q^n \times v_0$
- si le premier terme est v_1 : $v_n = q^{n-1} \times v_1$

Exemple : Un capital de 1 000 € augmente de 5 % par mois. Quel sera le capital au bout d'un an ?

Soit la suite (v_n) où v_n représente le capital après un n mois. On pose le capital initial $v_0 = 1\ 000$. La suite est géométrique de raison $q = 1,05$. Au bout d'un an : $n = 12$, donc :

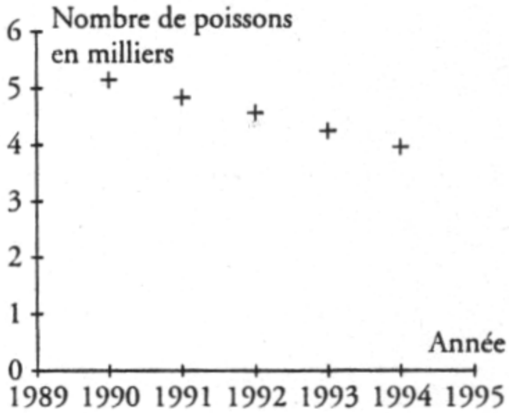
$$v_{12} = 1.05^{12} \times 1\ 000 \simeq 1\ 795,86$$

4 Application

Des scientifiques veulent étudier l'évolution à long terme d'une population de poissons d'une petite rivière. Pour cela ils disposent des résultats de comptages effectués dans une portion de cette rivière entre 1990 et 1994.

Le tableau et le graphique ci-après donnent les effectifs trouvés par annéede 1990 à 1994.

Année	Nombre de poissons
1990	5 150
1991	4 840
1992	4 570
1993	4 250
1994	3 960



Nombre de poissons dans la portion de rivière étudiée entre 1990 et 1994

1) Un premier scientifique suggère de modéliser l'évolution du nombre de poissons par une suite arithmétique.
   Pourquoi le graphique laisse-t-il penser qu'une suite arithmétique pourrait convenir ?

   Les points semblent alignés. Une croissance linéaire peut donc convenir. Ainsi, on peut modéliser l'évolution du nombre de poissons par une suite arithmétique

2) Ce premier scientifique choisit de modéliser l'évolution du nombre de poissons par la suite arithmétique (u_n), de raison $r = -300$ et de premier terme $u_0 = 5\ 150$. Ainsi u_n représente le nombre de poissons l'année $(1990 + n)$.
   a) Quelle interprétation peut-on donner de la raison de cette suite pour la population de poissons ?

      La raison $r = -300$ est négative, donc la suite (u_n) est décroissante. La population de poissons est effectivement décroissante

   b) Exprimer u_n en fonction de n.

      (u_n) est arithmétique donc :

$$u_n = u_0 + n \times r$$
$$u_n = 5\ 150 - 300n$$

c) Calculer l'effectif de la population prévue par ce modèle en 2004.

En 2004, on a $n = 2004 - 1990 = 14$

$$u_{14} = 5\ 150 - 300 \times 14 = 950$$

Il y aura donc 950 poissons en 2004

3) Un deuxième scientifique n'est pas convaincu par ce modèle et propose pour cette population une évolution exponentielle. En effet, il remarque que :

$$\frac{4\ 840}{5\ 150} \simeq \frac{4\ 570}{4\ 840} \simeq \frac{4\ 250}{4\ 570} \simeq \frac{3\ 960}{4\ 250} \simeq 0,935$$

Il choisit alors de modéliser l'évolution du nombre de poissons par la suite géométrique (vn), de raison $q = 0,935$ et de premier terme $v_0 = 5\ 150$. Ainsi v_n représente le nombre de poissons l'année $(1990 + n)$.

a) Quel est le pourcentage de diminution annuelle du nombre de poissons selon ce modèle ?

Comme le rapport entre deux termes consécutifs est quasi-constant, une suite géométrique est acceptable aussi.
On a donc comme coéfficient multiplicateur $CM = 0,935$. On trouve alors le pourcentage de diminution :

$$(1 - CM) \times 100 = (1 - 0,935) \times 100 = 6,5\ \%$$

Le pourcentage de diminution est donc de 6,5 %.

b) Exprimer v_n en fonction de n.
Comme (v_n) est une suite géométrique, on a :

$$v_n = q^n\, v_0$$
$$v_n = 5\ 150 \times 0,935^n$$

c) Calculer v_{14}. Le résultat sera arrondi à l'unité.

$$v_{14} = 5\ 150 \times 0,935^{14}$$
$$v_{14} \simeq 2010 \text{ à l'unité près}$$

4) En 2004, un comptage a été effectué et on a relevé 1 980 poissons dans la portion de rivière étudiée.

a) Lequel des deux modèles proposés ci-dessus est-il le plus pertinent ? Justifier la réponse.

En 2004, on a trouvé 950 poissons pour le premier modèle et 2010 pour le second. La suite géométrique est donc plus proche du résultat réel 1980.

b) On choisit d'utiliser le modèle proposé par le second scientifique. Calculer v_{30} et v_{40}, (les résultats seront arrondis à l'unité).

$$v_{30} = 5\ 150 \times 0,935^{30} \simeq 686$$
$$v_{40} = 5\ 150 \times 0,935^{40} \simeq 350$$

Déterminer l'année à partir de laquelle la population des poissons passera en dessous des 500 individus.

La population de poissons passera en dessous de 500 entre $n = 30$ et $n = 40$. En testant les valeurs de n à partir de 30, on trouve :

$$v_{34} \simeq 524 \quad \text{et} \quad v_{35} \simeq 490$$

$n = 35$ correspond à $1990 + 35 = 2025$. En 2025 la population de poissons passera sous la barre de 500 unités