Compléments sur la valeur absolue

1 Équations du type |u(x)| = |v(x)|

Règle 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2x-1| = |5-x|$
D'après la règle précédente, on a :

$$2x - 1 = 5 - x \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = -5 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

Graphiquement : Il faut tracer les fonctions $f(x) = |2x-1|$ et $g(x) = |5-x|$
Il faut alors trouver les différentes formes des fonctions f et g. On détermine les valeurs frontières c'est à dire les valeurs de x qui annulent les fonctions f et g.

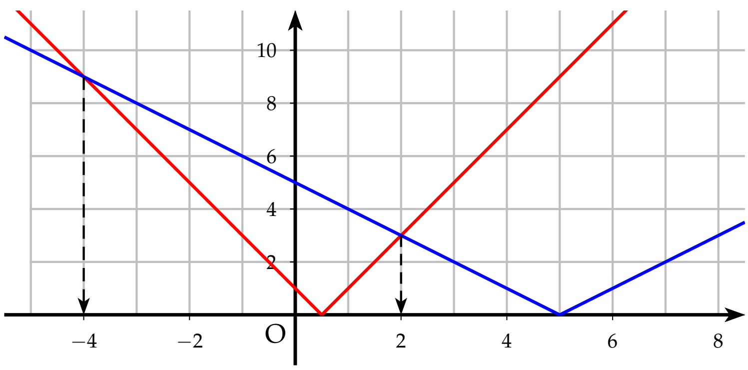
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

On trace ensuite les tableaux suivants :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$\|2x-1\|$		$-2x+1$	0	$2x-1$	

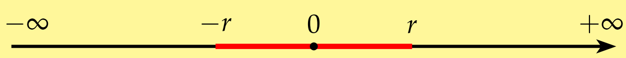
x	$-\infty$		5		$+\infty$
$5-x$		$+$	0	$-$	
$\|5-x\|$		$5-x$	0	$5+x$	

On obtient alors les représentations suivantes avec les solutions (abscisses des points d'intersection)



2 Inéquation du type |u(x)|<r et |u(x)|>r

Règle 2 : Soit $r > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < r \quad \Leftrightarrow \quad -r < x < r$

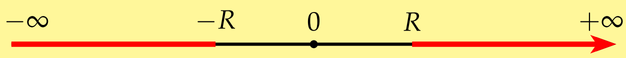


Remarque : Même encadrement avec des inégalités larges

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $|5x-2|<3$

$$-3<5x-2<3 \quad\Leftrightarrow\quad -1<5x<5 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{5}<x<1 \quad\Leftrightarrow\quad S=\left]-\frac{1}{5},1\right[$$

Règle 3 : Soit $r>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\quad |x|>r \;\Leftrightarrow\; x<-r$ ou $x>r$



Remarque : Même encadrement avec des inégalités larges

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $|3-2x|\geqslant 5$

$3-2x\leqslant -5$ ou $3-2x\geqslant 5 \;\Leftrightarrow\; x\geqslant 4$ ou $x\leqslant -2 \;\Leftrightarrow\; S=]-\infty\,;-2]\cup[4\,;+\infty[$

3 Autre type d'équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $|-3x+4|+|-5+x|=10 \quad (E_1)$

- On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue :

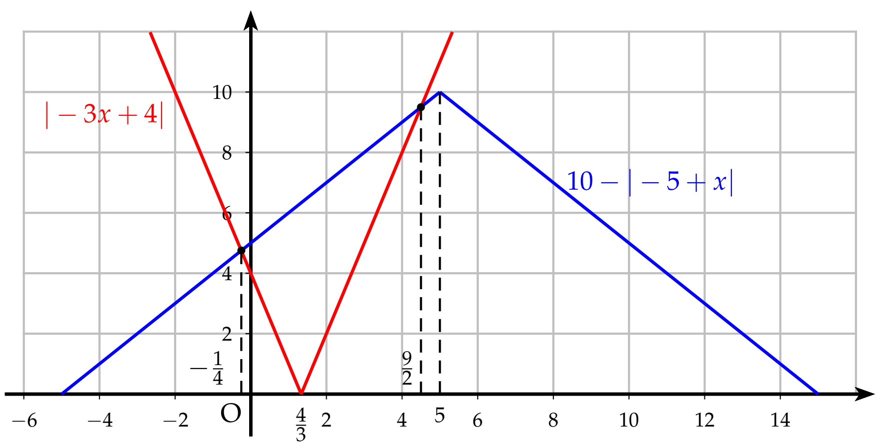
$$-3x+4=0 \text{ et } -5+x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{4}{3} \text{ et } x=5$$

- On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$\lvert -3x+4\rvert$	$+$ $-3x+4$	0	$-$ $3x-4$	11	$-$ $3x-4$	
$\lvert -5+x\rvert$	$-$ $5-x$	$\frac{11}{3}$	$+$ $5-x$	0	$+$ $-5+x$	
(E_1)	$-4x+9=10$ $x=-\frac{1}{4}$ possible		$2x+1=10$ $x=\frac{9}{2}$ possible		$4x-9=10$ $x=\frac{19}{4}$ impossible	

$$S=\left\{-\frac{1}{4};\frac{9}{2}\right\}$$

- Résolution graphique :



4 Autre type d'inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $|2x-1| \leqslant |x+2| \quad (E_2)$

- On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue.

$$2x-1=0 \quad \text{soit} \quad x=\frac{1}{2}$$
$$x+2=0 \quad \text{soit} \quad x=-2$$

- On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$		$-2x+1$	5	$-2x+1$	0	$2x-1$	
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$	0	$x+2$	$\frac{5}{2}$	$x+2$	
(E_2)		$-2x+1 \leqslant -x-2$ $x \geqslant 3$ impossible $S_1=\varnothing$		$-2x+1 \leqslant x+2$ $x \geqslant -\frac{1}{3}$ $S_2=\left[-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right]$		$2x-1 \leqslant x+2$ $x \leqslant 3$ $S_3=\left[\frac{1}{2}\,;\,3\right]$	

On obtient alors la solution $\quad S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left[-\frac{1}{3}\,;\,3\right]$

- Résolution graphique :