Calcul d'une image d'un polynôme par la méthode de Horner

1 Nombre d'opérations pour le calcul d'une image

1.1 Polynôme du second degré

Soit la polynôme P_1 défini par : $P_1(x) = 3x^2 - 5x + 7$

1) a) Calculer le nombre d'additions et de multiplication nécessaires pour calculer $P_1(8)$.

   b) Calculer à la main $P_1(8)$.

2) a) Montrer que l'on peut écrire : $P_1(x) = 7 + x[-5 + 3x]$.

   b) Calculer le nombre d'additions et de multiplications nécessaires pour calculer $P_1(8)$ avec cette nouvelle expression.

   c) Comment remplit-on le tableau suivant dont on a détaillé 3 étapes ? Que calcule-t-il ?

	3	-5	7
8		24	
	3		

	3	-5	7
8		24	152
	3	19	

	3	-5	7
8		24	152
	3	19	159

   d) Par le même procédé calculer $P_1(-4)$

1.2 Polynôme du troisième degré

Soit la polynôme P_2 défini par : $P_2(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x - 10$

1) a) Calculer le nombre d'additions et de multiplications nécessaires pour calculer $P_2(3)$

   b) Calculer à la main $P_2(3)$

2) a) Montrer que l'on peut écrire : $P_2(x) = -10 + x\,(4 + x[-7 + 5x])$

   b) Calculer le nombre d'additions et de multiplication nécessaires pour calculer $P_2(3)$ avec cette nouvelle expression.

   c) Comment remplit-on le tableau suivant dont on a détaillé 4 étapes ? Que calcule-t-il ?

	5	-7	4	-10
3		15		
	5			

	5	-7	4	-10
3		15	24	84
	5	8	28	

	5	-7	4	-10
3		15	24	
	5	8		

	5	-7	4	-10
3		15	24	84
	5	8	28	74

   d) Par le même procédé calculer $P_2(-4)$

1.3 Polynôme de degré n

Soit la polynôme P défini par : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

1) Calculer le nombre d'additions et de multiplications nécessaires pour calculer $P(\alpha)$
2) a) Montrer que l'on peut écrire : $P(x) = a_0 + x\,(a_1 + x\,(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x)\ldots))$
   b) Calculer le nombre d'additions et de multiplication nécessaires pour calculer $P(\alpha)$ avec cette nouvelle expression.
3) On donne le tableau suivant basé sur le même procédé que précédemment :

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
α		c_{n-1}	c_{n-2}	$\ldots$	c_2	c_1	c_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_1	b_0	S

   a) Quelle est la valeur de b_{n-1} ?
   b) Comment calcule-t-on c_{n-1} à partir de b_{n-1} ?
   c) Comment calcule-t-on b_{n-2} à partir de a_{n-1} et c_{n-1} ?
   d) On réitère le procédé comme indiqué par le tableau. Que vaut alors la valeur S ?

2 Algorithme

On souhaite automatiser le procédé par un algorithme. On propose l'algorithme suivant :

```
   Variables : N, I, J, A  entiers
               L1, L2  listes
   Entrées et initialisation
2      Lire  N
3      pour I de 1 à N + 1 faire
4          Lire J
5          J → L1(I)
       fin
7      Lire A
8      L1(N + 1) → L2(1)
   Traitement
10     pour I de 1 à N faire
11         A L2(I) + L1(N − I + 1) → L2(I + 1)
       fin
   Sorties : Afficher L2(N + 1)
```

1) Sur l'algorithme :
   a) Pourquoi à la ligne 3, on va jusqu'à $N+1$?
   b) Que fait-on aux lignes 3, 4, 5 ?
   c) À quoi correspond la variable A à la ligne 7 ?
   d) À la ligne 8, a quoi correspond $L_2(1)$?
   e) Expliquer la formule de la ligne 11.
2) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice.
   a) Vérifier le résultat pour $P_1(4)$
   b) Vérifier le résultat pour $P_2(4)$