Fonctions de référence
Variations des fonctions associées

$$f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

f est une relation qui à un réel x associe un unique réel y tel que : $y = f(x)$

Généralités

Ensemble de définition D_f : ensemble des valeurs de x pour lesquelles la fonction f est définie.

Lorsque D_f est symétrique par rapport à l'origine :

Fonction paire : $\forall x \in D_f,\ \ f(-x) = f(x)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonction impaire : $\forall x \in D_f,\ \ f(-x) = -f(x)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport à O.

Relations entre deux fonctions

Soit les fonctions f et g définies sur I.

On définit alors les relations suivantes :

- $f = g \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathrm{I},\ \ f(x) = g(x)$
- $f > 0 \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathrm{I},\ \ f(x) > 0$
- $f > g \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathrm{I},\ \ f(x) > g(x)$

Fonction affine et fonction racine

Une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$

- a est le **coefficient directeur**.
  Son signe donne les variations de la fonction affine.
- b est l'**ordonnée à l'origine** : $f(0) = b$.
- $\mathscr{C}_f$ est une droite passant par le point $(0, b)$

La f$^{\text{nt}}$ racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$
La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Variations

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non) contenant a et b. Soit une fonction f définie sur I :

- f croissante sur I $\ \Leftrightarrow\ [\, a < b \ \Rightarrow\ f(a) < f(b)\,]$
- f décroissante sur I $\ \Leftrightarrow\ [\, a < b \ \Rightarrow\ f(a) > f(b)\,]$
- f monotone sur I $\ \Leftrightarrow\ f$ croissante ou décroissante sur I

Une fonction croissante conserve l'inégalité.
Une fonction décroissante inverse l'inégalité.

Fonction carrée et fonction du second degré

La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

- f est **décroissante** sur $\mathbb{R}_-$ et **croissante** sur $\mathbb{R}_+$.
- $\mathscr{C}_f$ est une parabole d'axe (Oy) de sommet O.

Une fonction du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

- Le signe de a donne les variations de la fonction f.
- $\mathscr{C}_f$ est une parabole d'axe $x = \alpha$ et de sommet $\mathrm{S}(\alpha, \beta)$.

Variations des fonctions associées

Somme : $k \in \mathbb{R}^*$ et u, v deux fonction définies sur I.

- u et $u + k$ ont mêmes variations.
- Si u et v croissantes sur I alors $u + v$ croissante sur I.
- Si u et v décroissantes sur I alors $u + v$ décroissante sur I.

Produit par un réel : $\lambda \in \mathbb{R}$ et u une fonction définie sur I.

- Si $\lambda > 0$ alors u et λu ont mêmes variations.
- Si $\lambda < 0$ alors u et λu ont des variations contraires.

Soit $u > 0$ sur I alors u et $\sqrt{u}$ ont mêmes variations sur I.

Inverse : soit u une fonction de signe constant sur I.

Les fonction u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires sur I.

Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x| \quad \begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}$ et pour tous x et y réel

- Distance : $|x - a|$ est la distance de x au réel a.
- Parité : $|x| = |-x|$.
- Inégalité triangulaire : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
- Équation : $|x| = |y| \ \Leftrightarrow\ x = y$ ou $x = -y$.
- Inéquation : $|x| > |y| \ \Leftrightarrow\ x^2 > y^2$.
- Racine carrée : $\sqrt{x^2} = |x|$.

Fonction inverse et fonction homographique

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

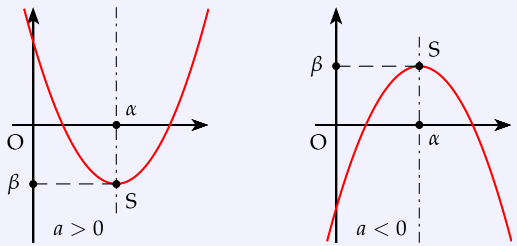
- f est **décroissante** sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\mathscr{C}_f$ est une hyperbole équilatère de centre O dont les asymptotes sont les axes de coordonnées.

Une fonction homographique est définie sur $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ par
$$f(x) = \frac{a}{x - \alpha} + \beta.$$

- Le signe de a donne les variations de la fonction f.
- $\mathscr{C}_f$ est une hyperbole équilatère de centre $\Omega(\alpha, \beta)$ dont les asymptotes sont les droites $x = \alpha$ et $y = \beta$.

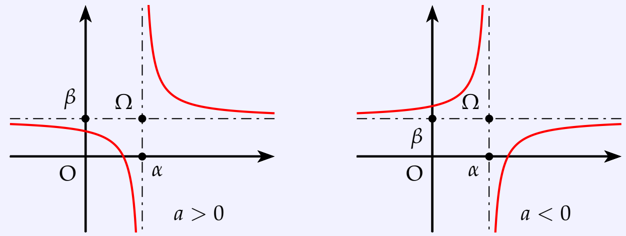
Fonctions du second degré

Représentation des fonctions : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$



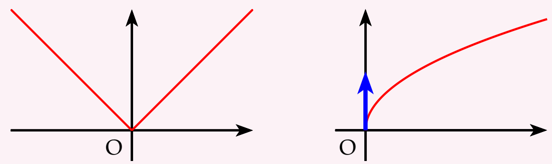
Fonctions homographiques

Représentation des fonctions : $f(x) = \dfrac{a}{x-\alpha} + \beta$



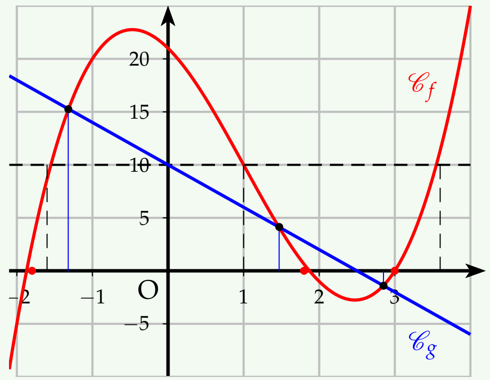
Fonctions valeur absolue et racine carrée

Représentation des f$^{\text{nt}}$: $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sqrt{x}$.



Représentations graphique

Soit les représentations $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction affine g.



Résolutions graphiques

$f(x) = 0$: On cherche les abscisses des points d'intersection entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

$$S_1 = \{-1,8\ ;\ 1,8\ ;\ 3\}$$

$f(x) \geqslant 10$: On cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou au-dessus de la droite $y = 10$.

$$S_2 = [-1,6\ ;\ 1] \cup [3,6\ ; +\infty[$$

$f(x) \leqslant -4x + 10$: On trace la droite $y = -4x + 10$.
Elle passe par les points (0 ; 10) et (2,5 ; 0).
Elle correspond à $\mathscr{C}_g$.
On cherche les abscisses des pts de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

$$S_3 =]-\infty\ ; -1,3] \cup [1,5\ ;\ 2,8]$$

Résolutions équations et inéquations

- $|x-2| = |2x+1| \Leftrightarrow x-2=2x+1$ **ou** $x-2=-2x-1$
  $\Leftrightarrow S_1 = \left\{-3\ ;\ \dfrac{1}{3}\right\}$
- $|x-2| > 5 \Leftrightarrow -5 < x-2 < 5 \Leftrightarrow -3 < x < 7$
  $\Leftrightarrow S_2 = [-3\ ;\ 7]$
- $|x+3| > 2 \Leftrightarrow x+3 > 2$ **ou** $x+3 < -2$
  $\Leftrightarrow S_3 =]-\infty, -5[\ \cup\ ]-1; +\infty[$
- $|3x+1| \geqslant |2x+4| \Leftrightarrow (3x+1)^2 \geqslant (2x+4)^2$
  $\Leftrightarrow (3x+1)^2 - (2x+4)^2 \geqslant 0$
  $\Leftrightarrow (x-3)(5x+5) \geqslant 0$
  $\Leftrightarrow S_4 =]-\infty\ ; -1] \cup [3\ ; +\infty[$

Somme de deux fonctions

Variation sur $\text{I} =]0\ ; +\infty[$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = -5x + 3 + \frac{1}{x} = u(x) + v(x)$$

- $u(x) = -5x+3$: la fonction u est décroissante sur I.
- $v(x) = \dfrac{1}{x}$: la fonction v est décroissante sur I.

Par somme la fonction f est décroissante sur I.

Produit d'une fonction par un scalaire

Variation sur $\text{I} = [0\ ; +\infty[$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = -4\sqrt{x} = -4u(x)$$

- $u(x) = \sqrt{x}$: la fonction u est croissante sur I.

Par produit par -4 la fonction f est décroissante sur I.

Racine et inverse d'une fonction

Variation sur $\text{I} =]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}]$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{1-2x} = \sqrt{u(x)}$$

- $1 - 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \text{I}$
- $u(x) = 1 - 2x$: la fonction u est décroissante sur I.

Comme les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont même variation, la fonction f est décroissante sur I.