

Correction bonus sur la fonction dérivée

EXERCICE 1

Parcours le plus rapide

Soit x l'abscisse du point P.

- D'après le théorème de Pythagore : $AP^2 = x^2 + 9^2 \Leftrightarrow AP = \sqrt{x^2 + 81}$.
- Par différence on a : $PB = 15 - x$

Soit t_1 et t_2 les temps respectifs en heures mis par le gardien pour relier A à P puis P à B.

Soit T le temps total du trajet en heures. On a alors $T = t_1 + t_2$.

Comme le gardien se déplace à 4 km/h sur AP et à 5 km/h sur PB, d'après la relation

$$T = \frac{AP}{4} + \frac{PB}{5} = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{15 - x}{5}$$

T est donc une fonction de x . On pose alors : $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{15 - x}{5}$.

Pour trouver le parcours le plus rapide, il faut donc trouver le minimum de T sur $[0 ; 15]$.

On dérive la fonction T : $T'(x) = \frac{1}{4} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 81}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 4\sqrt{x^2 + 81}}{20\sqrt{x^2 + 81}}$.

$$\begin{aligned} T'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 5x - 4\sqrt{x^2 + 81} \geq 0 \Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{x^2 + 81} \stackrel{12 \text{ et } x \geq 0}{\Leftrightarrow} 25x^2 \geq 16(x^2 + 81) \\ &\Leftrightarrow 25x^2 \geq 16x^2 + 1296 \Leftrightarrow 9x^2 \geq 1296 \Leftrightarrow x^2 \geq 144 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x \geq 12 \end{aligned}$$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	0	12	15
$T'(x)$		- 0 +	
$T(x)$	15,25	4,35	$\approx 4,37$

$$T(0) = \frac{9}{4} + 3 = 5,25$$

$$T(12) = \frac{12^2 + 81}{4} + \frac{3}{5} = 4,35$$

$$T(15) = \frac{\sqrt{15^2 + 81}}{4} = \frac{3\sqrt{34}}{4} \approx 4,37$$

Le parcours le plus rapide est obtenue pour $x = 12$.

EXERCICE 2

Tir d'avion

Soient x_A l'abscisse de l'avion permettant d'atteindre la cible d'abscisse c .

Soit f la fonction associée à la trajectoire de l'avion : $f(x) = \frac{2x + 1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$

On a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Soit T_A la tangente en x_A : $T_A : y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x_A^2}(x - x_A) + 2 + \frac{1}{x_A}$.

La cible d'abscisse c est atteinte si la tangente en x_A coupe l'axe des abscisses en c .

$$-\frac{1}{x_A^2}(c - x_A) + 2 + \frac{1}{x_A} = 0 \stackrel{\times x_A^2}{\Leftrightarrow} -c + x_A + 2x_A^2 + x_A = 0 \Leftrightarrow 2x_A^2 + 2x_A - c = 0 \text{ (E)}.$$

- $c = 2$, (E) devient : $2x_A^2 + 2x_A - 2 = 0 \Leftrightarrow x_A^2 + x_A - 1 = 0$.

$\Delta = 1 + 4 = 5$. La solution positive est $x_A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,62$

- $c = 4$, (E) devient : $2x_A^2 + 2x_A - 4 = 0 \Leftrightarrow x_A^2 + x_A - 2 = 0$.

La solution positive évidente est $x_A = 1$

- $c = 6$, (E) devient : $2x_A^2 + 2x_A - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A^2 + x_A - 3 = 0$.

$\Delta = 1 + 12 = 13$. La solution positive est $x_A = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \approx 1,30$

