La fonction dérivée

Table des matières

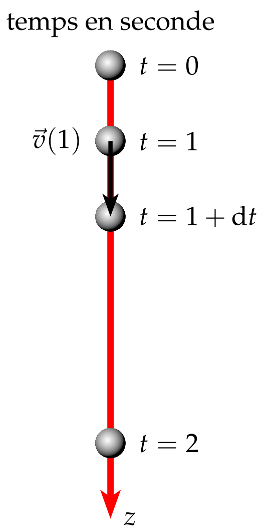
1 Un problème historique

La notion de fonction dérivée ne s'est pas construite en un jour. Un petit problème historique va nous permettre de comprendre les difficultés qu'ont rencontrées les mathématiciens pour définir la fonction dérivée.

Tout commence avec Newton (1643-1727) avec la détermination de la vitesse instantané pour un objet en chute libre.

Exemple : Soit une pierre que l'on lâche à $t = 0$ s. Quelle est sa vitesse instantanée au bout d'une seconde ?

Newton savait depuis Galilée que si l'on néglige la force de frottement de l'air sur une pierre (matière compacte), sa vitesse ne dépend pas de sa masse. Galilée a pu déterminer l'équation horaire (position de l'objet en fonction du temps) d'un objet en chute libre. Cette équation est de la forme, en prenant $g = 10$ m.s^{-2} comme accélération de la pesanteur :



$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$$

Pour calculer la vitesse instantanée en $t = 1$, on mesure la distance entre les instants $t = 1$ et $t = 1 + \mathrm{d}t$, où l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ est le plus petit possible (quantité infinitésimal).

$$v(1) = \frac{z(1 + \mathrm{d}t) - z(1)}{\mathrm{d}t}$$

$$v(1) = \frac{5(1 + \mathrm{d}t)^2 - 5}{\mathrm{d}t}$$

$$v(1) = \frac{5 + 10\mathrm{d}t + 5\mathrm{d}t^2 - 5}{\mathrm{d}t}$$

$$v(1) = 10 + 5\mathrm{d}t$$

Pour Newton la vitesse en $t = 1$ s est de 10 m.s^{-1}. Mais la vitesse est-elle exactement égale à 10 m.s^{-1} ou d'environ 10 m.s^{-1} ?

- Si la vitesse est exactement de 10 m.s^{-1} alors $\mathrm{d}t = 0$
- mais si $\mathrm{d}t = 0$, la notion de vitesse instantanée n'a aucun sens : le dénominateur est nul.
- Si la vitesse instantanée est d'environ 10 m.s^{-1} comment calculer la vitesse exacte ?

Ce problème a opposé les mathématiciens. Les uns donnaient raison à Newton, les autres critiquaient sa méthode peu rigoureuse.
Ce blocage ne fut résolu qu'au XIX$^{\text{e}}$ siècle avec la notion de limite. Si cette notion de limite est cette fois rigoureuse, elle a malheureusement complexifiée le problème de départ. Avec ce nouveau concept de limite, la vitesse instantanée en $t = 1$ vaut :

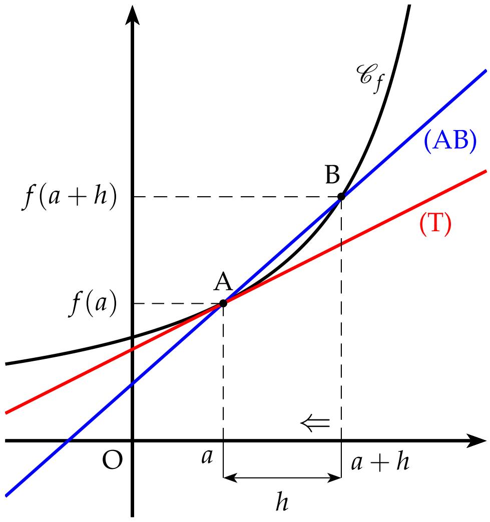
$$v(1) = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

La vitesse en 1 est la limite quand $\mathrm{d}t$ tend vers 0 de la variation d'altitude, $\mathrm{d}z$, sur la variation de temps $\mathrm{d}t$.

Remarque : La notion rigoureuse de limite sera vue en terminale. Pour ce chapitre nous nous contenterons d'utiliser la méthode intuitive de Newton.

2 Le nombre dérivé

2.1 Définition



Le coefficient directeur α de la droite (AB), pour $h \neq 0$, est :

$$\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si le point B se rapproche du point A (h tend vers 0), la droite (AB) se rapproche de la tangente (T) à la courbe en $x = a$. Le coefficient directeur de cette tangente (T) est appelé **nombre dérivé**. Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition 1 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I.

- On appelle **taux d'accroissement** (ou taux de variation) de la fonction f entre a et $a+h$, le nombre t défini par :

$$t = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- La fonction f admet un **nombre dérivé**, noté $f'(a)$, en a, si et seulement si, le taux d'accroissement de la fonction f en a **admet une limite finie**, c'est à dire :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

⚠ La notation $h \to 0$ signifie que h tend vers zéro mais ne l'atteint pas ($h \neq 0$).

Remarque :

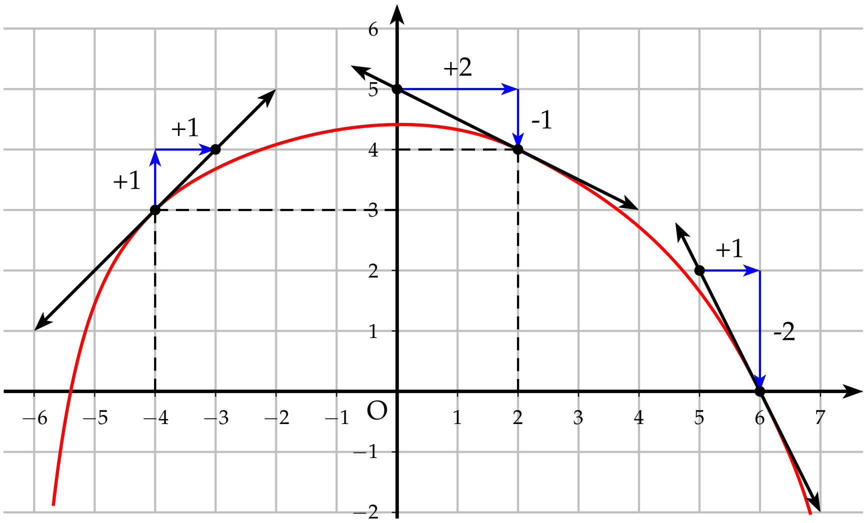
- On utilisera par la suite la première notation.
- Les physiciens utilisent la notation appelée différentielle : $f'(a) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

2.2 Exemples

Deux exemples graphiques pour montrer la signification du nombre dérivé.

La courbe représentative f est donnée ci-après. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. La fonction admet donc des nombres dérivés en ces points. Lire, en se servant du quadrillage les nombres suivants :

- $f(-4)$ et $f'(-4)$
- $f(2)$ et $f'(2)$
- $f(6)$ et $f'(6)$

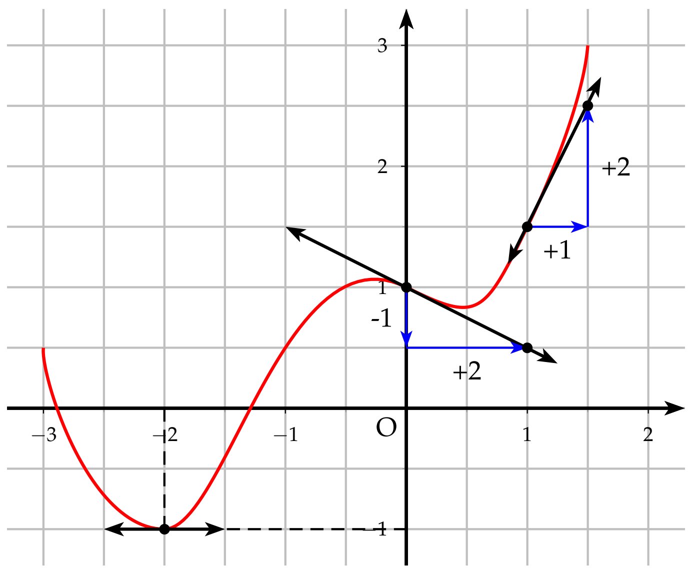


On lit les images et les nombres dérivés suivants :

$$\begin{cases} f(-4) = 3 \\ f'(-4) = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(-2) = 4 \\ f'(2) = \dfrac{-1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(6) = 0 \\ f'(6) = \dfrac{-2}{1} = -2 \end{cases}$$

La courbe représentative g est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. La fonction admet donc des nombres dérivés en ces points. Lire, en se servant du quadrillage les nombres suivants :

- $g(-2)$ et $g'(-2)$
- $g(0)$ et $g'(0)$
- $g(1)$ et $g'(1)$



On lit les images et les nombres dérivés suivants :

$$\begin{cases} g(-2) = -1 \\ g'(-2) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} g(1) = 1{,}5 \\ g'(1) = \dfrac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

3 Fonction dérivée. Dérivée des fonctions élémentaires

3.1 Fonction dérivée

Définition 2 : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

Si la fonction f admet un nombre dérivé en tout point de I, on dit que la fonction f est dérivable sur I. La fonction, notée f', définie sur I qui a tout x associe son nombre dérivé est appelée **fonction dérivée** de f.

Remarque : Le but du paragraphe suivant est de déterminer les fonctions dérivées des fonctions élémentaires puis d'établir des règles opératoires afin de pouvoir déterminer la dérivée d'une fonction quelconque.

3.2 Fonction dérivée des fonctions élémentaires

3.2.1 Fonction affine

Soit f la fonction affine suivante : $f(x) = ax + b$

La fonction affine est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminons le taux d'accroissement en x, pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} a = a$

3.2.2 Fonction carrée

Soit f la fonction carrée : $f(x) = x^2$

La fonction carrée est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminons le taux d'accroissement en x, pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2x + h = 2x$

3.2.3 Fonction puissance (admis)

$f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$

Exemple : Soit $f(x) = x^5$ on a alors $f'(x) = 5x^4$.

3.2.4 Fonction inverse

Soit f la fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse est définie et dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$.

Déterminons le taux d'accroissement en $x \neq 0$, pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} = \frac{\dfrac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{h \times x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{x(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

3.2.5 Fonction puissance inverse (admis)

$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ on a alors $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5}$.

3.2.6 Fonction racine

Soit f la fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$

La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ La fonction racine est définie mais pas dérivable en 0. Sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0 et donc l'équation de cette tangente n'admet pas de coefficient directeur.

Déterminons le taux d'accroissement en $x \neq 0$,pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

On passe à la limite :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3.3 Règles de dérivation

Dans tout ce paragraphe, on considère deux fonctions u et v, dérivables sur I, et un réel λ

3.3.1 Dérivée de la somme

On peut montrer facilement que la dérivée de la somme est la somme des dérivées car $(u+v)(x) = u(x)+v(x)$

La dérivée de la somme : $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$

Exemple : Soit la fonction f telle que : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

en appliquant la règle de la somme : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$

3.3.2 Produit par un scalaire

On peut montrer facilement que la dérivée du produit par un scalaire est le produit du scalaire par la dérivée car $(\lambda\, u)\,(x) = \lambda\, u(x)$

La dérivée du produit par un scalaire : $\boxed{(\lambda\, u)' = \lambda\, u'}$

Exemple : Soient : $f(x) = 3x^4$ et $g(x) = 5x^3 + 12x^2 - 7x + 3$

en appliquant la règle ci-dessus : $f'(x) = 3(4x^3) = 12x^3$

en appliquant les deux règles : $g'(x) = 15x^2 + 24x - 7$

3.3.3 Dérivée du produit

⚠ La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Calculons le taux d'accroissement de $(uv)\,(x) = u(x)v(x)$, pour $h \neq 0$:

$$\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

On retranche puis on ajoute un même terme

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{v(x+h)(u(x+h) - u(x)) + u(x)(v(x+h) - v(x))}{h} \\
&= v(x+h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}
\end{aligned}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned}
(uv)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[v(x+h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} v(x+h) \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} u(x) \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= v(x)u'(x) + u(x)v'(x)
\end{aligned}$$

La dérivée du produit : $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

⚠ La dérivée du produit n'est malheureusement pas le produit des dérivées !

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que : $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$

f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x + 3x + 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9x+1}{2\sqrt{x}}$

3.3.4 Dérivée de l'inverse

⚠ La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Calculons le taux d'accroissement de $\left(\dfrac{1}{v}\right)(x) = \dfrac{1}{v(x)}$, pour $h \neq 0$ et $v(x) \neq 0$:

$$\frac{\dfrac{1}{v(x+h)} - \dfrac{1}{v(x)}}{h} = \frac{\dfrac{v(x)-v(x+h)}{v(x)v(x+h)}}{h} = -\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x+h)v(x)}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x+h)v(x)}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} -\frac{v(x+h)-u(x)}{h} \times \lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x+h)v(x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

La dérivée de l'inverse : $\boxed{\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}}$

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

En appliquant la règle de l'inverse : $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

3.3.5 Dérivée du quotient

On cherche la dérivée du produit par l'inverse : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \left(u \times \dfrac{1}{v}\right)'$

D'après la règle du produit, on obtient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = u'\dfrac{1}{v} + u\dfrac{-v'}{v^2} = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

La dérivée du quotient : $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}}$

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+1}$

En appliquant la dérivée du quotient :

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x(2x+5)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-10x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-10x+2}{(x^2+1)^2}$$

3.3.6 Dérivée de la puissance et de la racine

⚠ On donne sans démonstration la dérivée de la puissance et de la racine. Dans ce dernier cas, la fonction u doit être positive sur I.

$$\boxed{(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1} \quad \text{et} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

Exemple : Soient $f(x) = (3x-5)^5$ et $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

En appliquant les règles sur la dérivée de la puissance et de la racine, on a :

$$f'(x) = 5 \times 3(3x-5)^4 = 15(3x-5)^4 \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

3.4 Tableau récapitulatif

Voici le tableau des fonctions élémentaires que l'on vient de montrer ainsi que les fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

Fonction	D_f	Dérivée	D'_f
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Voici maintenant les principales règle de dérivation.

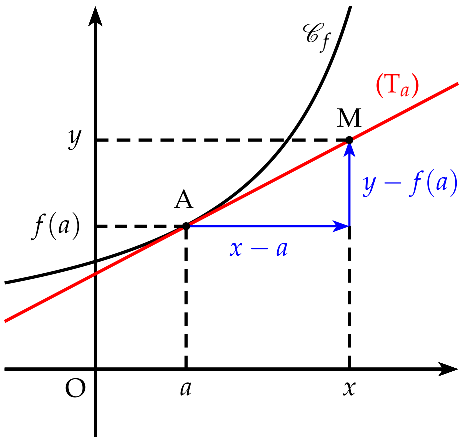
Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Remarque : Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

4 Interprétations géométrique et numérique

4.1 Équation de la tangente

Soit la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f et (T_a) sa tangente en $x = a$.
On a alors le schéma suivant :



Le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé en a. Si on considère un point $\mathrm{M}(x;y)$ quelconque de cette tangente, on obtient alors :

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Théorème 1 : L'équation de la tangente (T_a) en a à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f dérivable en a est égale à :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$

Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

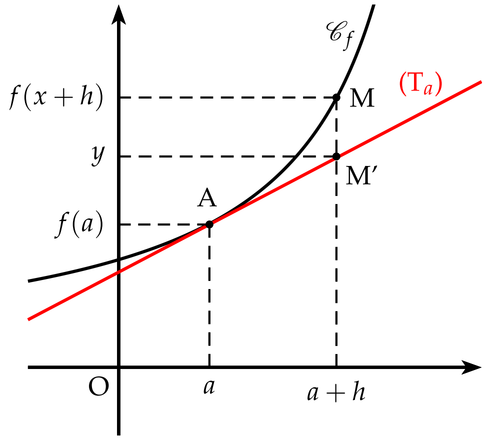
On détermine l'expression de la dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$
On calcule ensuite :

$$\begin{cases} f'(2) = 3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 3 = 12 - 12 + 3 = 3 \\ f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 4 = 8 - 12 + 6 + 4 = 6 \end{cases}$$

On obtient donc l'équation de la tangente suivante :

$$y = 3(x - 2) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 6 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x$$

4.2 Approximation affine



Lorsque x est proche de a, on peut confondre en première approximation le point M sur la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f avec le point M′ d'abscisse x de la tangente (T_a) à la courbe en a.
On pose $x = a + h$ avec h proche de 0.
Si on confond le point M avec le point M′, on a :

$$y \simeq f(a+h)$$

On obtient alors : $\boxed{f(a+h) \simeq f(a) + h f'(a)}$

Exemple : Déterminer une approximation affine de $\sqrt{4,03}$.

On pose $f(x) = \sqrt{x}$, on a $a = 4$ et $h = 0,03$. On calcule alors la dérivée en 4.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{donc} \quad f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$\text{et donc} \quad f(4,03) \simeq f(4) + 0,03 \times \frac{1}{4} \simeq 2,0075$$

On obtient donc : $\sqrt{4,03} \simeq 2,0075$ à comparer à $\sqrt{4,03} \simeq 2{,}007\,486$. La précision est donc de 10^{-4}.

4.3 Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement : position, vitesse, accélération d'un solide en physique. C'est justement l'étude de la vitesse instantannée qui a permis à Newton de concevoir le concept de dérivée. La vitesse est alors la dérivée de l'équation horaire et l'accélération la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

Exemple : Deux mobiles M_1 et M_2 sont sur l'axe des abscisses animé d'un mouvement dont les lois horaires en fonction du temps t sont respectivement

$$x_1(t) = 2t^2 + t + 4 \quad \text{et} \quad x_2 = -t^2 + 5t + 8$$

a) Déterminer les positions et les vitesses initiales des mobiles M_1 et M_2.

   À l'instant initial, on a $t=0$, d'où $x_1(0) = 4$ et $x_2(0) = 8$.

   Pour calculer les vitesses initiales, on dérive :

   $$v_1(t) = x_1'(t) = 4t + 1 \quad \text{et} \quad v_2(t) = x_2'(t) = -2t + 5$$

   On a alors : $v_1(0) = 1$ et $v_2(0) = 5$.

b) Calculer l'instant t_0 où les deux mobiles se rencontrent. Déterminer la position correspondante.

   Pour que les deux mobiles se rencontrent, on doit avoir : $x_1(t) = x_2(t)$ soit

   $$2t^2 + t + 4 = -t^2 + 5t + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2 - 4t - 4 = 0$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2 \text{ d'où } t_1 = \frac{4+8}{6} = 2 \text{ ou } t_2 = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}$$

On ne retient que la solution positive $t \geqslant 0$ soit $t_1 = t_0$.
Les mobiles se rencontrent donc au bout de 2 secondes.

Leur position est alors : $x_1(2) = x_2(2) = 14$

c) Calculer les vitesses respectives de ces deux mobiles à l'instant t_0.
Les deux mobiles se croisent-t-il ou si l'un dépasse -t-il l'autre ?

On a $v_1(2) = 9$ et $v_2(2) = 1$.

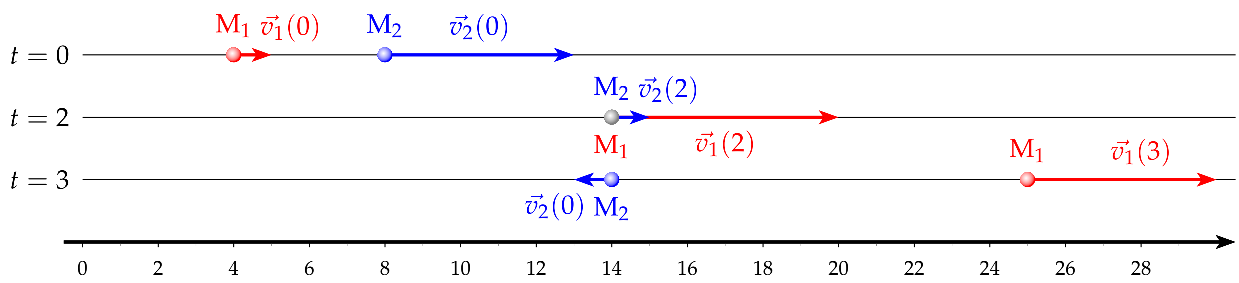
Comme $v_1(2) > v_2(2) > 0$ les vitesses ont même signe, donc M_1 double M_2.

d) Bilan sur les deux mouvements.

On peut calculer les accélérations respectives de M_1 et M_2 :
$$a_1(t) = v_1'(t) = 4 \quad \text{et} \quad a_2(t) = v_2'(t) = -2$$

a_1 et a_2 sont constantes donc les deux mobiles sont uniformément accélérés.

- $a_1(t) = 4$ et $v_1(0) > 0$. Le mobile M_1 se dirige toujours vers le sens positif de plus en plus vite.
- $a_2(t) = -2$ et $v_2(0) > 0$. Le mobile M_2 se dirige vers le sens positif de moins en moins vite puis rebrousse chemin pour se diriger dans l'autre sens de plus en plus vite.
  M_2 rebroussera chemin lorsque sa vitesse s'annulera soit
  $$v_2(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2t + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2,5$$
  Au bout de 2,5 s, le mobile M_2 rebrousse chemin.



Simulation (position) des deux mobiles à l'aide d'un algorithme.

Soit N le temps de la simulation, P l'unité de temps où l'on repère les points M_1 et M_2 et T le temps écoulé

Pour éviter que les points soient situés sur l'axe des abscisses, on prend une ordonnée de 1

Fenêtre : $X \in [0, 40]$, $Y \in [-3, 5]$

Essai avec $N = 4$ et $P = 0,01$

Variables : N, I entiers P, T réels
Entrées et initialisation
    Effacer dessin
    Lire N, P
    Tracer point (4 , 1) en rouge
    Tracer point (8 , 1) en bleu
Traitement et sorties
    pour I variant de 1 à N/P **faire**
        Attendre P
        Effacer le point $(2T^2 + T + 4 , 1)$
        Effacer le point $(-T^2 + 5T + 8 , 1)$
        $IP \to T$
        Tracer le point $(2T^2 + T + 4 , 1)$ en rouge
        Tracer le point $(-T^2 + 5T + 8 , 1)$ en bleu
    fin

5 Sens de variation d'une fonction

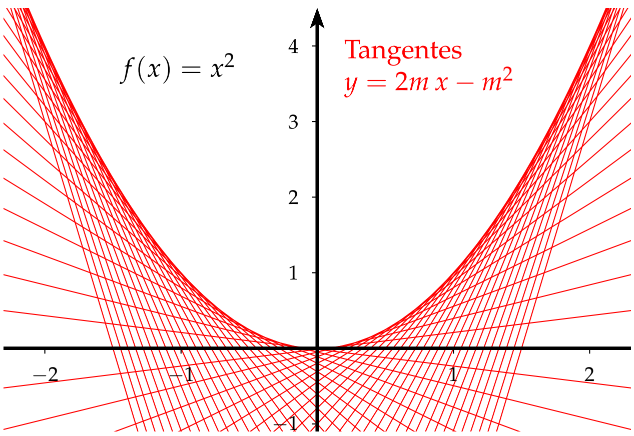
5.1 Aperçu géométrique

Si l'on trace un certain nombre de tangentes à une courbe sans tracer celle-ci, on peut remarquer que la courbe apparaît en filigrane. Voici deux exemples où m est un paramètre que l'on fait varier de façon à obtenir une famille de tangentes.

- Pour tracer les tangentes (T_m) de la fonction carrée en m, on utilise l'équation de la tangente :

$$y = f'(m)(x-m) + f(m) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2m(x-m) + m^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2mx - m^2$$

On trace ensuite ces tangentes (T_m) en faisant varier m dans l'exemple ci-contre de -3 à 3 avec un pas de $\frac{1}{9}$

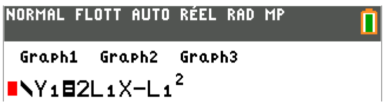


On peut proposer l'algorithme suivant pour tracer les tangentes (T_m)

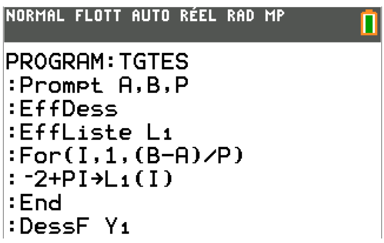
Variables : I entier, M réel et f fonction
Entrées et initialisation
  Effacer l'écran
  Effacer dessin
Traitement et sorties
  pour I de 0 à 54 **faire**
    $\dfrac{I}{9} - 3 \to M$
    Tracer (T_M)
  fin

Pour la programmation avec la *TI 82 stats*, pour des valeurs de $m \in [-2;2]$ avec 20 valeurs, on trace la famille de droites (T_m) de la manière suivante :

a) On écrit ces droites comme suit :

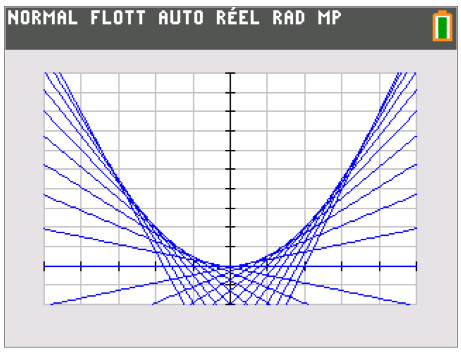


b) On écrit le programme suivant :

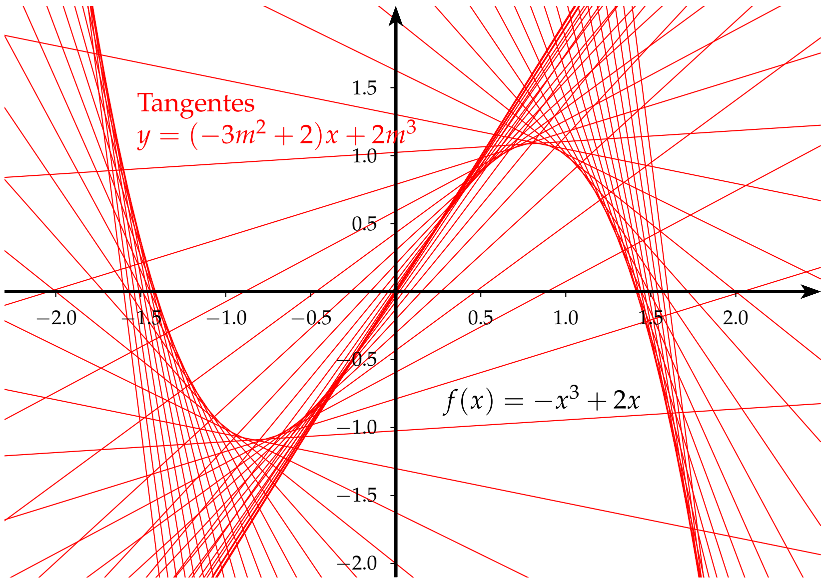


```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:TGTES
:Prompt A,B,P
:EffDess
:EffListe L1
:For(I,1,(B-A)/P)
: -2+PI→L1(I)
:End
:DessF Y1
```

c) On obtient le graphique suivant



- On peut proposer un autre exemple de courbe définie par une famille de tangentes :



5.2 Sens de variation

On admettra le théorème suivant qui précise le lien entre variation et dérivée.

Théorème 2 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est **nulle**, alors la fonction est **constante**.
- Si la fonction dérivée est **strictement positive** (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule), alors la fonction f est **strictement croissante** sur I.
- Si la fonction dérivée est **strictement négative** (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule), alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I.

Exemple : Déterminer les variations de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$

- On calcule la dérivée : $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$
- On cherche les valeurs qui annulent la dérivée :

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

- Le signe de $f'(x)$ est celui d'un trinôme du second degré.
  On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	6	↘	$-\infty$

5.3 Extremum d'une fonction

Théorème 3 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Si $c \in$ I est un extremum local de f sur I alors $f'(c) = 0$
- Si $c \in$ I, $f'(c) = 0$ et si f' change signe en c alors c est un extremum local de f sur I.

Exemple : Sur la fonction $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$, étudiée plus haut, la dérivée $f'(x) = 3x(-x+2)$, s'annule et change de signe en 0 et 2. On en déduit que 0 et 2 sont des extremum de f, respectivement minimum et maximum.

Remarque : Les extremum locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée, mais si $f'(a) = 0$, a n'est pas nécessairement un extremum local. En effet, soit $f(x) = x^3$, sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 mais ne change pas de signe. 0 n'est pas un extremum local.

5.4 Applications

5.4.1 Une fonction polynôme

Soit le fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 10$

a) Calculer la fonction dérivée f'.

b) Calculer $f'(1)$. En déduire une factorisation de la fonction dérivée f'.

c) Déterminer les racines et le signe de la fonction dérivée f'

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

e) Vérifier ce tableau en traçant la courbe sur votre calculatrice en prenant une fenêtre convenablement choisie

$\Rightarrow \Rightarrow$

a) On calcule la dérivée : $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 3$

b) On calcule : $f'(1) = 4 + 9 - 10 - 3 = 0$

Donc $x = 1$ est une racine de $f'(x)$.
On peut donc factoriser $f'(x)$ par $(x-1)$. On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

On identifie les coefficients à la première forme de $f'(x)$. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} a = 4 \\ b - a = 9 \\ c - b = -10 \\ -c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 9 + a = 13 \\ c = 3 \end{cases}$$

On a alors $f'(x) = (x-1)(4x^2 + 13x + 3)$

c) Déterminons les racines de : $4x^2 + 13x + 3$

$\Delta = 169 - 48 = 121 = 11^2 \quad \Delta > 0$ deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-13+11}{8} = -\frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-13-11}{8} = -3$$

Conclusion : $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-3; -\frac{1}{4}; 1\right\}$

Pour déterminer le signe de $f'(x)$, on remplit un tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x^2+13x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

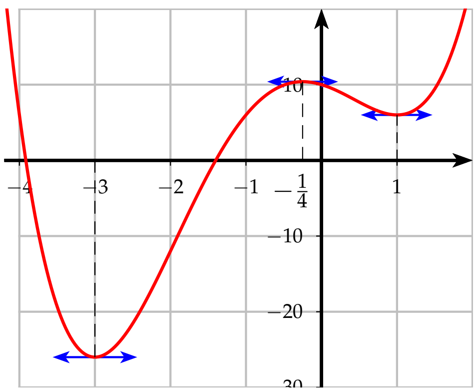
d) On dresse alors le tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-26	$\nearrow$	$\simeq 10.4$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

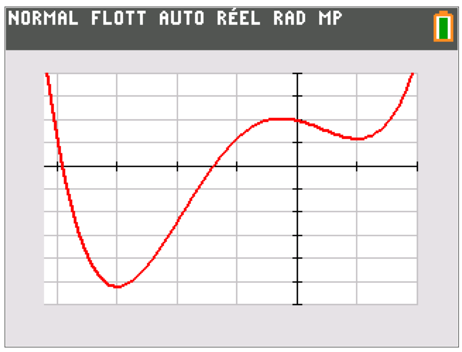
e) Pour déterminer la fenêtre du graphique il faut remarquer dans le tableau de variation les valeurs des extremum pour les ordonnées et prendre un intervalle pour les abscisses qui permettent d'observer les différents extremum tout en ayant une échelle pas trop petite. On peut proposer comme intervalles :

$$x \in [-4,2\,;\,2] \qquad \text{et} \qquad y \in [-30\,;\,20]$$

Sur la courbe, on peut mettre les tangentes horizontales qui permettent de mettre en évidence les extremum.



Avec la calculatrice, on obtient :



5.4.2 Une fonction bornée

Le but de ce problème est de montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \dfrac{2x}{x^2+1} \leqslant 1$

Pour cela, on pose la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(-x) = -f(x)$.
Que peut-on en déduire par rapport à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ?

c) Calculer la dérivée f'. On cherchera à factoriser $f'(x)$.

d) Déterminer les racines et le signe de $f'(x)$

e) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
En déduire alors que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$

f) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que les tangentes horizontales.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \; x^2+1 \geqslant 1$, donc le dénominateur ne s'annule pas. $D_f = \mathbb{R}$

b) On calcule : $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \dfrac{-2x}{x^2+1} = -f(x) \quad f$ est impaire

La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport à l'origine.

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

d) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$

Comme le dénominateur est positif, le signe de $f'(x)$ est le signe de :
$-2(x-1)(x+1) = -2x^2+2$

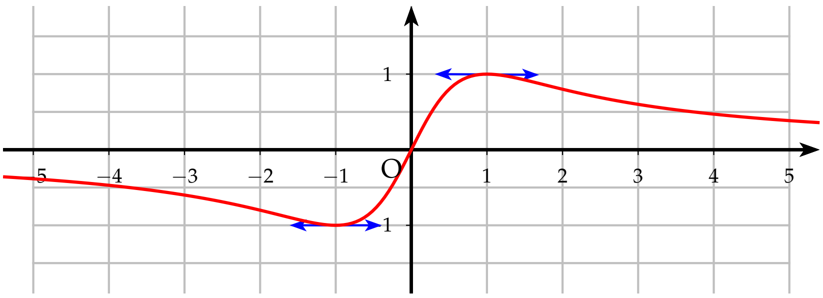
e) On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	< 0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	> 0

Comme $x^2+1 > 0$, si $x < 0$, $f(x) < 0$ et si $x > 0$, $f(x) > 0$

D'après le tableau de variation, on a donc : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$

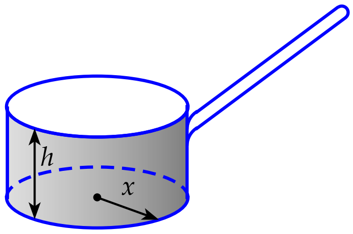
f) On obtient la courbe $\mathscr{C}_f$ suivante :



6 Optimisation

Pourquoi la hauteur d'une casserole est approximativement égale à son rayon quelque soit sa contenance ?

Pour répondre à cette question, on se propose de résoudre le problème suivant :



Comment fabriquer une casserole de volume v donné avec le moins de matière possible ?

On suppose que le prix de revient du manche ne dépend pas des dimensions de la casserole.

On note x le rayon du cercle du fond, h la hauteur et $\mathcal{S}$ l'aire totale égale à l'aire latérale plus l'aire du fond.

1) a) Exprimer h en fonction de v et x

   b) Exprimer $\mathcal{S}$ en fonction de v et de x.

2) a) Étudier sur $]0;+\infty[$ les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \pi\, x^2 + \frac{2v}{x}$$

   b) En déduire la réponse à la question

1) a) Le volume v d'un cylindre de hauteur h et de rayon x a pour expression :

$$v = \pi x^2 h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{v}{\pi x^2}$$

   b) La surface de métal correspond à l'aire latérale (bande de métal de dimension h par $2\pi x$) plus l'aire du fond, donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= (2\pi x)h + \pi x^2\\ &= 2\pi x \times \frac{v}{\pi x^2} + \pi x^2\\ &= \frac{2v}{x} + \pi x^2\end{aligned}$$

2) a) On dérive la fonction f : $f'(x) = -\dfrac{2v}{x^2} + 2\pi x = \dfrac{2\pi x^3 - 2v}{x^2}$

On a alors :
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = \frac{v}{\pi}$$

or on a : $v = \pi x^2 h$, en remplaçant :

$$x^3 = \frac{\pi x^2 h}{\pi} = x^2 h \quad \Leftrightarrow \quad x = h$$

Donc la dérivée s'annule pour $x = h$ et comme la fonction cube est croissante, avant h la dérivée est négative et positive après. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		h		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(h)$	$\nearrow$	

b) La surface de métal est donc minimum pour $x = h$, ce qui répond à notre problème.