La fonction dérivée

La fonction dérivée est intimement liée à la notion de limite et de tangente.

Nombre dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I.
Soit $a \in$ I.
La fonction f admet un nombre dérivé en a, noté $f'(a)$, si la limite du taux d'accroissement existe et est finie :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

⚠ On retiendra plutôt la première formulation.
Les physiciens utilisent la notation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

Variation d'une fonction dérivable

Soit une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante.
- Si $f' > 0$ sur I, alors f est croissante.
- Si $f' < 0$ sur I, alors f est décroissante.

Dérivées des fonctions élémentaires

Soit n un entier naturel non nul.

Fonction	Dérivée	Condition
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0\,;+\infty[$

Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

Si la fonction f admet un nombre dérivé en chacun des points de I, on dit que la fonction f est dérivable sur I.

On définit alors sur I, la fonction dérivée, notée f', la fonction qui à x associe son nombre dérivé.

⚠ La plupart des fonctions élémentaires sont dérivable sur leur ensemble de définition à part la fonction racine qui est uniquement dérivable sur $]0\,;+\infty[$

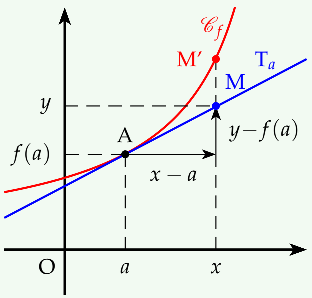
Règles de dérivation

Somme	: $(u+v)' = u' + v'$
Prd par un scalaire	: $(\lambda u)' = \lambda u$
Produit	: $(uv)' = u'v + uv'$
Inverse	: $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
Quotient	: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Puissance	: $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Racine	: $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Interprétations géométrique et numérique

Équation de la tangente T_a en a à la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dérivable en a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Lorsque x est proche de a, le point M′ de $\mathscr{C}_f$ est proche du point M de T_a.

On peut alors faire l'approximation affine suivante :

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$$

Extremum d'une fonction dérivable

Soit une fonction f sur un intervalle ouvert I contenant c.

- Si c est un extremum de f sur I alors $f'(c) = 0$
- Si f' s'annule en c en changeant de signe alors c est un extremum de f sur I.

⚠ Les extremum de la fonction sont à chercher parmi les « zéro » de la dérivée mais la condition de changement de signe est essentielle pour avoir un extremum (c.e. fonction cube en 0).

Dérivée et cinématique

En physique, la notion de dérivée est liée au calcul de la vitesse instantanée et de l'accélération.

Si $x(t)$ correspond à la position d'un point M se déplaçant sur l'axe des abscisses, on a alors :

- la vitesse instantanée : $v(t) = x'(t)$
- l'accélération : $a(t) = v'(t) = x''(t)$

x'' correspond à la dérivée seconde de x soit la dérivée de la dérivée de x

Calculs de dérivées

Quelques conseils lorsqu'on calcule une dérivée

- Comme il est plus facile de dériver une somme qu'un quotient, on ne cherchera pas à réduire au même dénominateur avant de dériver.
- Comme le signe de la dérivée donne les variation de la fonction, on cherchera à factoriser la dérivée lorsque cela est possible.
- On peut être amener à utiliser plusieurs règles pour dériver une fonction.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivation.

- $f_1(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 10$ on utilise la linéarité de la dérivée

$$f_1'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 3$$

- $f_2(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-1}$ on ne réduit pas au même dénominateur !

$$f_2'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

- $f_3(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ on dérive comme un quotient et l'on factorise !

$$f_3'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

- $f_4(x) = (x^2+x+1)^3$ on dérive comme une puissance.

$$f_4'(x) = 3(2x+1)(x^2+x+1)^2$$

- $f_5(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ on dérive en utilisant les règles du quotient et de la racine.

$$f_5'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)(1)}{(1+x)^2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{-1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

La fonction f_5 est dérivable si $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ soit pour $x \in]-1\,;\,1[$

Étude et représentation d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction, on calcule la dérivée, on résout $f'(x) = 0$ puis on détermine le signe de la dérivée.

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$
  a) Déterminer les variations de la fonction f.
  b) Déterminer l'équation de la tangente T_1 au point $x = 1$.
  c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T_1 ainsi que les tangentes horizontales, dans un repère d'unité 1 cm sur les abscisses et 2 cm sur les ordonnées.

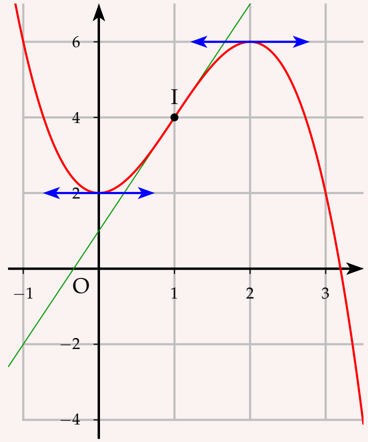
a) $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$.
f' s'annule en 0 et en 2 et son signe est celui du trinôme.
On dresse le tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

b) On calcule : $f(1) = 4$ et $f'(1) = 3$.

$$T_1 \;:\; y = 3(x-1) + 4 \;\Leftrightarrow\; y = 3x + 1$$

c) On obtient la courbe suivante :



On peut montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point de symétrie en I.
Il faut montrer que :

$$f(1-x) + f(1+x) = 2f(1)$$

On peut montrer également que l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution comprise entre 3 et 4.