Suites

Une suite numérique est une fonction définie de $\mathbb{N}$ (ou partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$:

$$(u_n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u_n$$

- u_n désigne le terme général de la suite.
- (u_n) désigne la suite dans sa globalité.
- La représentation d'une suite est un nuage de points.

Suite arithmétique

1) Une suite arithmétique (u_n) est définie par :
   - Un premier terme : u_0 ou u_p
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ avec r raison de (u_n).

   (ou à partir de p si (u_n) commence à u_p)
2) Une suite **est** arithmétique de raison r ssi la différence de deux termes consécutifs est constante et vaut r :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$$

3) L'expression de u_n en fonction de u_0 ou u_p est :

$$u_n = u_0 + n\,r \quad \text{ou} \quad u_n = u_p + (n-p)\,r$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

- Somme des n premiers entiers naturels :

$$1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Généralement pour la somme des premiers termes :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

$(n-p+1)$ correspond aux nbre de termes de u_p à u_n

Exemple : $S = 8 + 13 + 18 + \cdots + 2013$

$$S = \underbrace{\left(\frac{2013-8}{5} + 1\right)}_{\text{Nbre de termes}} \times \frac{8 + 2013}{2} = 406\,221$$

Suite géométrique

1) Une suite géométrique (v_n) est définie par :
   - Un premier terme : v_0 ou v_p
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times q$ avec q raison de (v_n).

   (ou à partir de p si (v_n) commence à v_p)
2) Une suite **est** géométrique de raison $q \neq 0$, de termes non nuls, ssi le quotient de deux termes consécutifs est constant et vaut q :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

3) L'expression de v_n en fonction de v_0 ou v_p est :

$$v_n = v_0 \times q^n \quad \text{ou} \quad v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Somme des termes d'une suite géométrique $q \neq 1$

- Somme des $(n+1)$ premières puissance de q :

$$1 + q + q^2 \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Généralement pour la somme des premiers termes :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

$(n-p+1)$ correspond aux nbre de termes de v_p à v_n

Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs.
On montre par exemple que :

$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs non nuls.
On montre par exemple, pour v_0 et v_1 non nuls, que :

$$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

Variation d'une suite géométrique

- Si $q > 1$, la suite (q^n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite (q^n) est décroissante.

Pour une suite géométrique quelconque, on prendra en compte le premier terme v_0.

- Si $v_0 > 0$, (v_n) et (q^n) ont même variation.
- Si $v_0 < 0$, (v_n) et (q^n) ont des variations contraires

⚠ Si $q = 1$ ou $q = 0$, la suite (q^n) est constante.
Si $q < 0$, la suite (q^n) n'est pas monotone.

Comportement de la suite q^n

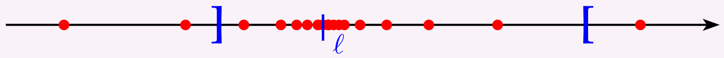
On a les limites suivantes selon les valeurs de q :

- si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- si $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- si $q \leqslant -1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas

Limites d'une suite

- **Convergence** d'une suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ signifie que

Tout intervalle ouvert contenant ℓ (aussi petit soit-il) contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On dit que la suite converge vers ℓ.



Il n'existe qu'un nombre fini de termes à l'extérieur de cet intervalle.

Soit la suite (u_n) définie par u_0 et la relation pour tout naturel $u_{n+1} = f(u_n)$.

(u_n) est monotone et converge vers ℓ.

Algorithme permettant de déterminer le rang N à partir duquel les termes de la suite (u_n) se trouvent à l'intérieur d'un intervalle ouvert centré en ℓ de rayon r.

Variables : N entier, u réel
Entrées et initialisation
  $u_0 \to u$, $0 \to N$
Traitement
  tant que $|u - \ell| \geqslant r$
   faire
    $f(u) \to u$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

- **Divergence** d'une suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ signifie que

Tout intervalle $]A\ ; +\infty[$ contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On dit que la suite diverge vers $+\infty$.
Les termes de la suite (u_n) arrivent à dépasser A, aussi grand soit-il.

Soit la suite (u_n) définie par u_0 et la relation pour tout naturel $u_{n+1} = f(u_n)$.

(u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

Algorithme permettant de déterminer le rang N à partir duquel les termes de la suite (u_n) sont supérieur à un réel A.

Variables : N entier, u réel
Entrées et initialisation
  $u_0 \to u$, $0 \to N$
Traitement
  tant que $u \leqslant A$ **faire**
    $f(u) \to u$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

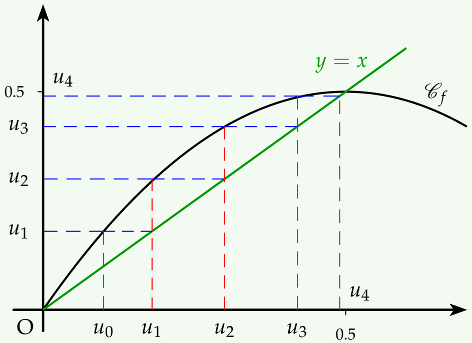
Remarque : une suite peut diverger sans avoir de limite.
La suite $[(-2)^n]$ diverge et n'admet pas de limite.

Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

- Variation d'une suite d'une suite : **2 méthodes**
  1) On étudie le signe de la quantité : $u_{n+1} - u_n$.
  Si la quantité est $\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) la suite est croissante (resp. décroissante).
  2) Si tous les termes sont > 0, on compare la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
  Si la quantité est $\geqslant 1$ (resp. $\leqslant 1$), la suite est croissante (resp. décroissante).
- Représentation des premiers termes de la suite :

Méthode : On trace la courbe de la fonction associée $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ d'équation $y = x$ pour reporter les termes sur la droite des abscisses.

Exemple : Soit la suite $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.



- Pour trouver la forme explicite de u_n, on passe par une suite auxiliaire, donnée dans l'énoncé, qui est soit arithmétique soit géométrique.
Parmi ces suites, on a les suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = au_n + b$

Exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$. On pose $v_n = u_n - 4$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2$$
$$= \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -3$

$$v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \Rightarrow \quad u_n = v_n + 4 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$