

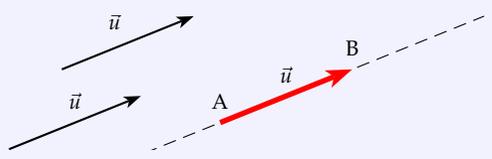
# Les vecteurs

Le point de vue géométrique

### Définition

Un vecteur  $\vec{u}$  dont un représentant est le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , est une classe d'équivalence définie par :

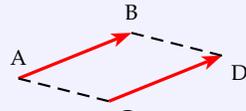
- une direction : celle de la droite (AB)
- un sens : de A vers B
- une longueur appelé **norme du vecteur  $\vec{u}$**  et notée  $||\vec{u}||$  ou  $||\overrightarrow{AB}||$ . Il s'agit de la distance  $AB \geq 0$



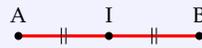
**Remarque :** Par abus de langage, on dira indistinctement le vecteur  $\vec{u}$  ou le vecteur  $\overrightarrow{AB}$

### Égalité de deux vecteurs – Milieu d'un segment

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$   
 ABDC parallélogramme



I milieu du segment [AB]



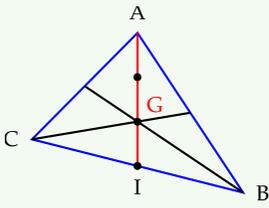
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  ou  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$  ou  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

### Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle alors ses trois médianes sont concourantes au centre de gravité G.  
 Soit I le milieu de [BC], on a alors :

G **centre de gravité**  $\Leftrightarrow$

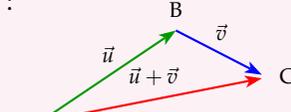
$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$   
 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$



### Somme de deux vecteurs – Relation de Chasles

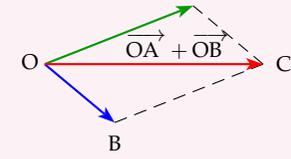
Pour additionner deux vecteurs  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$  on utilise la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Règle du parallélogramme

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$



L'addition de deux vecteurs est :

- commutative :  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- associative :  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- possède un **élément neutre** :  $\vec{0}$
- tout vecteur  $\overrightarrow{AB}$  possède un **opposé**  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .

### Application de la relation de Chasles

La relation de Chasles permet :

- d'« éclater » un vecteur en introduisant un point :  
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
- de réduire une somme :  
 $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MP}$

La relation de Chasles est un outil fondamental pour montrer que des vecteurs sont colinéaires par exemple.

### Milieu d'un segment

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$   
 $= 2\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}}$   
 $= 2\overrightarrow{AI}$

On retient :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

### Multiplication par un scalaire

Soit k un réel, le vecteur  $k\vec{u}$  correspond :

- à un vecteur de longueur  $|k| \times ||\vec{u}||$
- de même sens que  $\vec{u}$  si  $k > 0$
- de sens contraire à  $\vec{u}$  si  $k < 0$

La multiplication par un réel est bilinéaire :

$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$  et  $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

### Application du produit par un scalaire

On dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaire ssi  $\vec{v} = k\vec{u}$ ,  $k \in \mathbb{R}$

A, B, C alignés  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  colinéaires  
 $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  colinéaires

Ces deux équivalences sont fondamentales en géométrie car elles s'utilisent très souvent!

### Un exemple d'application de la colinéarité

Soit ABC un triangle, E, I et F tels que :  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .  
Démontrer que I, E et F sont alignés

Exprimons  $\overrightarrow{EI}$  et  $\overrightarrow{EF}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$ .

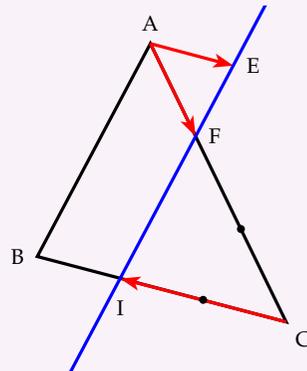
- $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$  donc  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ .

On en déduit que  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BI}$  donc que AEIB est un parallélogramme.

On a alors :  $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$   
 $= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$   
 $= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

On en déduit alors :  $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EI}$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{EF}$  et  $\overrightarrow{EI}$  sont colinéaires et donc les points E, F et I sont alignés.



### Pour aller plus loin - Notion de barycentre

On appelle **barycentre** de deux points A et B associés aux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , le point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \alpha + \beta \neq 0 \quad (1)$$

On note alors G barycentre des points pondérés (A,  $\alpha$ ) et (B,  $\beta$ )

**Remarque :** Lorsque  $\alpha = \beta$ , on dit que G est l'**isobarycentre** des points A et B. Le point G est alors le **milieu** du segment [AB].

De cette définition (1), on montre que  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$  (2)

**Exemple :** Soient A et B deux points.

Placer le barycentre  $G_1$  des points pondérés respectifs (A, 2), (B, 1).

D'après (2), on a :

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$



**Formule de réduction :** Si G est le barycentre de (A,  $\alpha$ ) et (B,  $\beta$ ) alors  $\forall M$  :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

Cette formule de réduction permet de déterminer les lignes de niveau c'est à dire de déterminer puis tracer l'ensemble des points M qui vérifient une relation vectorielle.

**Exemple :** Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient :  $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10$

Soit G barycentre de (A, 2) et (B, 3), on a alors :  $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$

L'égalité devient :  $\|5\overrightarrow{MG}\| = 10 \Leftrightarrow MG = 2$

L'ensemble demandé est donc le cercle de centre G est de rayon 2.

De même, on définit le **barycentre G de 3 points pondérés** (A,  $\alpha$ ), (B,  $\beta$ ) et (C,  $\gamma$ ) :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

**Remarque :** L'isobarycentre ( $\alpha = \beta = \gamma$ ) de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

**On généralise avec n points pondérés :**

Le barycentre G de  $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$  est défini par :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$$