

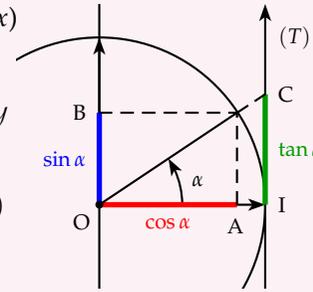
### Angles orientés mesurés en radian

- Le **radian** est une unité d'angle définie comme l'arc entre deux points du cercle unité de longueur 1.
- L'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$  est orienté de  $\vec{u}$  vers  $\vec{v}$ .
- On a les relations suivantes :
  - $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$  relation de Chasles
  - $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$  et  $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
- Soit  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deux mesures d'un même angle  $(\vec{u}, \vec{v})$  :
  - $\exists k \in \mathbb{R}, \theta_2 = \theta_1 + k2\pi \Leftrightarrow \theta_2 = \theta_1 [2\pi]$
- $\theta$  mesure principale d'un angle  $(\vec{u}, \vec{v})$  si  $\theta \in ]-\pi; \pi]$

### Lignes trigonométriques

Dans le cercle unité,  $\alpha$  est l'angle orienté :

- $\cos \alpha = \text{projeté de } \alpha \text{ sur } (Ox)$   
= OA
- $\sin \alpha = \text{projeté de } \alpha \text{ sur } (Oy)$   
= OB
- $\tan \alpha = \text{projeté de } \alpha \text{ sur } (T)$   
= IC



### Relations fondamentales

- $-1 \leq \cos a \leq 1$
- $-1 \leq \sin a \leq 1, \forall a \in \mathbb{R}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \sin^2 a + \cos^2 a = 1$
- $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}, \forall a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$

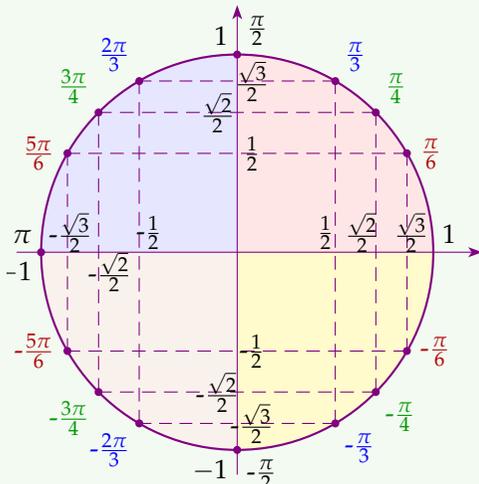
|               |   |                      |                      |                      |                 |
|---------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\alpha$      | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\tan \alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\infty$        |

## Angles orientés et trigonométrie

### Formules d'addition

Soient  $a$  et  $b$  deux angles quelconques :

- Avec cosinus on « ne panache pas » :
  - $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  - $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- Avec sinus on « panache » :
  - $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
  - $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$



### Tableau de signes de cosinus et sinus

|                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| $\cos \theta \leq 0$ | $\cos \theta \geq 0$ |
| $\sin \theta \geq 0$ | $\sin \theta \geq 0$ |
| $\cos \theta \leq 0$ | $\cos \theta \geq 0$ |
| $\sin \theta \leq 0$ | $\sin \theta \leq 0$ |

### Formules de duplication et de linéarisation

1) Formule de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$   
 $= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

2) Formules de linéarisation

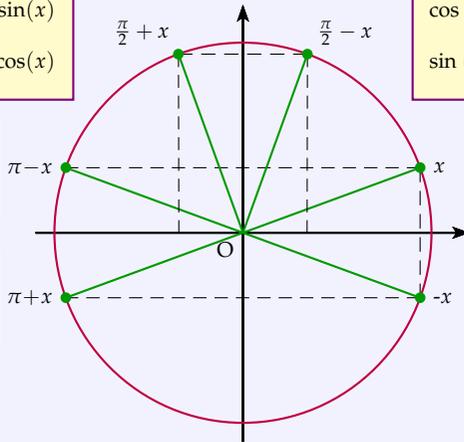
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$

## Symétries et compléments

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) &= -\sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x)\end{aligned}$$

### Exemple d'application

Soit  $A = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{23\pi}{14}$ . Montrer que  $A = 0$

$$\begin{aligned}A &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos -\frac{5\pi}{14} \quad \text{car } \frac{23\pi}{14} = -\frac{5\pi}{14} [2\pi] \\ &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right) + \cos \left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) + \cos \frac{5\pi}{14} \\ &= \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7} + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \\ &= 0\end{aligned}$$

## Applications des formules

- **Relations fondamentales :** Sachant que  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ , calculer  $\sin \frac{\pi}{5}$

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{16} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} \quad \cos \frac{\pi}{5} > 0$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

- **Formules d'addition :**

$$\begin{aligned}\cos \frac{7\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

- **Formules de linéarisation :**

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \quad \cos \frac{\pi}{8} > 0 \quad \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad \cos \frac{\pi}{8} > 0 \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

### Figure donnant les formules d'addition de cosinus et sinus

- On trace un cercle  $\mathcal{C}$  de centre O et de rayon 1.
- On repère le rayon [OA] par rapport à la droite (OI) par les angles  $x$  et  $y$ .
- Le point A se projette orthogonalement en H sur la droite (OI).
- Le point A se projette orthogonalement en B sur la droite formant un angle  $y$  avec (OI).
- Le point B se projette orthogonalement en C sur la droite (OI).
- Le point A se projette orthogonalement en D sur la droite (CB). On a alors :  $\widehat{ABD} = y$ .

Sachant que cosinus est la projection orthogonale sur l'axe horizontal et sinus sur l'axe vertical, on obtient la figure suivante :

