Le produit scalaire

dans le plan

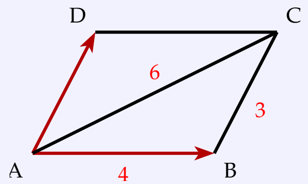
1re définition : définition normative

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et lu « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » tel que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

Remarque : Cette définition mesure le défaut d'orthogonalité entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit ABCD un parallélogramme.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



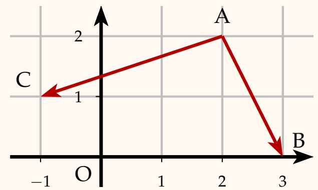
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AD}||^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2) = \frac{11}{2}$$

2e définition : définition analytique

Dans un **repère orthonormé** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est égal à :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = xx' + yy'$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$$



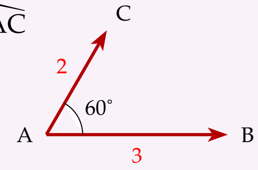
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = 1(-3)+(-2)(-1) = -1$$

3e définition : définition projective

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$$
$$= 3 \times 2 \times \cos 60°$$
$$= 6 \times \frac{1}{2} = 3$$



Remarque :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} > 0 \Leftrightarrow \widehat{BAC} < 90°$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} < 0 \Leftrightarrow \widehat{BAC} > 90°$

Propriétés algébriques du produit scalaire

- Commutativité : $\forall\, \vec{u}, \vec{v}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad \text{car } \cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\vec{v},\vec{u})$$

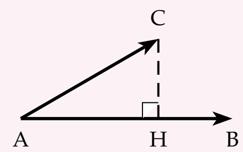
- Bilinéarité : $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\vec{u}\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} \quad \text{et} \quad (a\vec{u})\cdot(b\vec{v}) = ab \times \vec{u}\cdot\vec{v}$$

Théorème de la projection

Soit H la projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on a alors :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$



Détecteur d'angle droit

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :

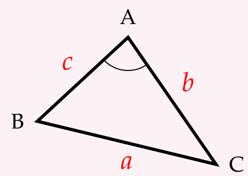
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont portés par des droites} \\ \text{perpendiculaires}\end{cases}$$

Relation d'Al-Kashi

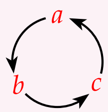
Généralisation du théorème de Pythagore.

a, b et c sont les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

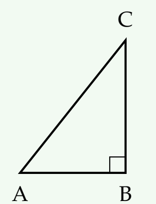


Par permutation circulaire :

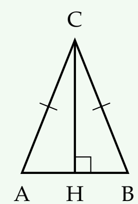


- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

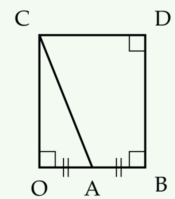
Quelques applications de la projection



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB^2$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AB^2$

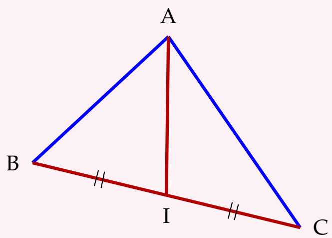


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB^2$

Théorème de la médiane
(à savoir démontrer !)

Soit I le milieu du segment [BC], alors pour tout point A du plan :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$



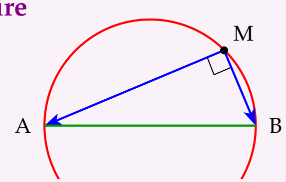
Démonstration

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= AI^2 + 2 \times \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2 + AI^2 + 2 \times \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} + IC^2 \\ &= 2AI^2 + 2 \times \overrightarrow{AI}\,(\underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}}) + \underbrace{IB^2 + IC^2}_{IB = IC = \frac{BC}{2}} \end{aligned}$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Cercle et produit scalaire

$$\begin{cases} M \in \mathscr{C} \\ \text{de diamètre [AB]} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{AMB est rectangle en M} \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \end{cases}$$



On appelle $\mathscr{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}(\Omega, r) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Omega M^2 = r^2 \\ (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2 \end{cases}$$

Méthode : savoir réduire une forme développée d'un cercle pour trouver ses éléments caractéristiques (centre et rayon). Soit le cercle $\mathscr{C}$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - x + 6y + \frac{21}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - x) + (y^2 + 6y) + \frac{21}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+3)^2 - 9 + \frac{21}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = 4$$

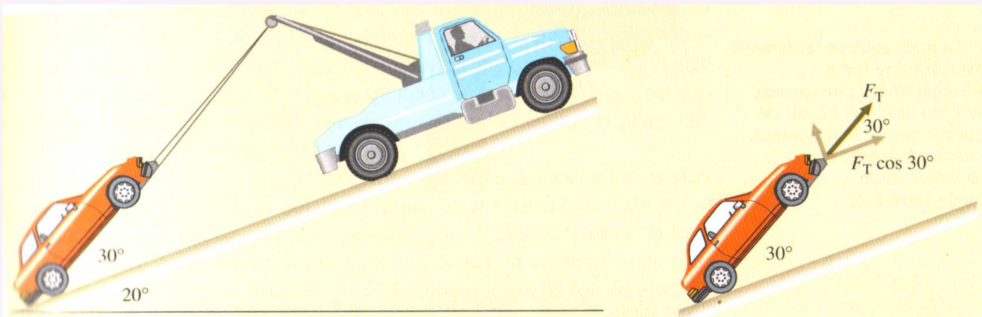
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}\ ;\ -3\right)$ et de rayon $r = 2$

Application du produit scalaire à la physique : travail d'une force

Le travail d'une force est une des origines du produit scalaire en mathématique. Le travail W « *work* » de cette force F mesure la participation d'une force dans le déplacement d'un mobile. Il est défini comme le produit scalaire du vecteur force $\overrightarrow{F}$ par le vecteur déplacement $\overrightarrow{\ell}$.
Il se mesure en joules.

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\ell}$$

Une dépanneuse remorque une voiture en panne sur une côte de 20°. La tension du câble est constante et les deux véhicules ont une accélération constante. En supposant que le câble fait un angle de 30°avec le plan de la route et que la tension est de 1600 N, quel est le travail effectué par la dépanneuse sur la voiture si celle-ci la remorque sur une distance de 500 m sur cette route en pente.



L'angle de la route n'a pas d'importance ici. On a alors :

$$W = \overrightarrow{F_T} \cdot \overrightarrow{\ell} = F_T \times \ell \times \cos 30° = 1600 \times 500 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 400\,000\sqrt{3}\ \text{J} \approx 692,82\ \text{kJ}$$