Probabilité, variable aléatoire. Loi binomiale

Table des matières

1 Loi de probabilité

1.1 Conditions préalables

Il s'agit de construire une structure mathématique qui permette de repérer des situations identiques et d'avoir une méthode rigoureuse dans un domaine où notre intuition nous conduit souvent à la solution sans vraiment avoir conscience de notre démarche.

Dans tout calcul de probabilité, il faut :

1) Une expérience aléatoire : il s'agit d'un protocole bien précis (règle d'un jeu) dont on ne peut prévoir l'issue.

   Exemples :
   - Lancer un dé sur une piste de jeu.
   - Lancer une pièce de monnaie.
   - Distribuer 5 cartes à un joueur avec un jeu de 32 cartes.
   - Poser une question au hasard à un lycéen choisi au hasard.
   - etc ...

2) Repérer toutes les issues possibles de l'expérience : il s'agit d'un dénombrement des issues possibles d'une expérience.

   Exemples :
   - Il y a 6 issues possibles pour un dé : $\{1;2;3;4;5;6\}$.
   - Il y a deux issues possibles pour une pièce de monnaie : face ou pile : $\{F;P\}$
   - Il y a 201 376 mains possibles de 5 cartes pour un jeu de 32 cartes
   - Il y a 1 200 lycéens dans l'échantillon qui peuvent être interroger.
   - etc ...

3) Déterminer ce que l'on souhaite comme issues.

   Exemples :
   - Obtenir un nombre pair avec un dé.
   - Obtenir face avec une pièce.
   - Obtenir 2 cœurs dans une main de cinq cartes.
   - Obtenir un lycéen âgé de moins de 17 ans.
   - etc ...

1.2 Définitions

Définition 1 : On appelle *univers* d'une expérience aléatoire, l'ensemble de toutes les issues de cette expérience. On appelle cet ensemble : Ω.

Si e_1, e_2,..., e_n sont les issues de cette expérience, on a alors : $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Exemples : :

- L'univers d'un dé : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
- L'univers d'une pièce : $\Omega = \{F;P\}$

- Parfois nommer toutes les issues est trop long comme l'univers d'une main de 5 cartes avec un jeu de 32 cartes. On se contente alors de compter les éléments de cet ensemble Ω

Définition 2 : On appelle cardinal d'un ensemble fini Ω, le nombre d'éléments qui le compose. On le note $\text{card}(\Omega)$
Si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont les issues de cette expérience, on a alors : $\text{card}(\Omega) = n$

Exemples :

- L'univers Ω d'un dé : $\text{card}(\Omega) = 6$
- L'univers Ω d'une main de cinq cartes : $\text{card}(\Omega) = 201\,376$

Définition 3 : On appelle probabilité d'une issue e_i, noté $p(e_i)$ le nombre compris entre 0 et 1 tel que :

$$p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 1$$

Définir *la loi de probabilité* d'une expérience, c'est déterminer les probabilités de tous les éléments de l'ensemble Ω.

Exemples :

- Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, 3 sont vertes (V), 3 sont bleues (B) et 4 sont jaunes (J), on tire une boule au hasard et on note sa couleur. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience.

  L'univers de cette expérience est $\Omega = \{V, R, J\}$. Pour déterminer la loi probabilité de cette expérience, il faut calculer les probabilités suivantes :

  $$p(V) = \frac{3}{10} = 0,3 \quad , \quad p(B) = \frac{3}{10} = 0,3 \quad , \quad p(J) = \frac{4}{10} = 0,4$$

  On regroupe ces résultats dans un tableau :

e_i	V	R	J
$p(e_i)$	0,3	0,3	0,4

- On a lancé 1 000 fois un dé pipé. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous. Établir la loi de probabilité du dé pipé.

numéro sorti	1	2	3	4	5	6
nombre de sorties	82	120	153	207	265	?

  Un dé pipé est un dé non équilibré. La loi de probabilité est alors établie par des données statistiques. Sans avoir de certitude sur les probabilités exactes, vu le grand nombre de lancers (1 000), on peut supposer que le nombre d'apparition d'une face détermine sa probabilité.

  L'ensemble univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Les probabilités d'apparition des faces 1 à 5 sont :

$$p(1) = \frac{82}{1000} = 0,082 \quad , \quad p(2) = \frac{120}{1000} = 0,12 \quad , \quad p(3) = \frac{153}{1000} = 0,153$$
$$p(4) = \frac{207}{1000} = 0,207 \quad , \quad p(5) = \frac{265}{1000} = 0,265$$

On a : $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$ donc

$$\begin{aligned} p(6) &= 1 - p(1) - p(2) - p(3) - p(4) - p(5) \\ &= 1 - 0,082 - 0,12 - 0,153 - 0,207 - 0,265 \\ &= 0,173 \end{aligned}$$

On peut alors remplir le tableau suivant :

e_i	1	2	3	4	5	6
$p(e_i)$	0,082	0,12	0,153	0,207	0,265	0,173

1.3 Loi équirépartie

Définition 4 : Lorsque toutes les issues ont la même probabilité d'apparition, on dit que la loi de probabilité est équirépartie (ou encore que l'on se situe dans un cas d'équiprobabilité).

Si $\text{card}(\Omega) = n$ alors on a : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad p(e_i) = \dfrac{1}{n}$

Exemples : :

- Dans un dé bien équilibré chaque face à la même probabilité d'apparition :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

- Si une pièce est bien équilibrée chaque face à la même probabilité d'apparition :

$$p(F) = p(P) = \frac{1}{2}$$

2 Probabilité d'un événement

2.1 Définition

Définition 5 : On appelle *événement* un sous ensemble de l'univers Ω.

Soit A un événement donné. $p(\mathrm{A})$, sa probabilité, est alors la somme des probabilités des issues qui le composent.

Exemple : On lance le dé pipé dont on a calculé la loi de probabilité au paragraphe précédent. Calculer la probabilité de l'événement A : "Obtenir un multiple de 3"

On a alors : $A = \{3, 6\}$, donc : $p(A) = p(3) + p(6) = 0,153 + 0,173 = 0,326$

Remarque :

- Si l'ensemble A est réduit à l'ensemble vide $\varnothing$, il n'est composé d'aucune issue. On l'appelle alors l'**événement impossible** et $p(\varnothing) = 0$
- Si l'ensemble A représente tout l'univers Ω, il est composé de toutes les issues. On l'appelle alors l'**événement certain** et $p(\Omega) = 1$

2.2 Événement d'une loi équirépartie

Théorème 1 : Dans une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A vérifie l'égalité suivante :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nbre d'issues de l'événement A}}{\text{nbre d'issues total}} = \frac{\mathrm{card}(\mathrm{A})}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Remarque : Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, le calcul de la probabilité revient à un problème de dénombrement. On peut alors utiliser pour dénombrer les différents cas : un arbre, un tableau double entrée, diagramme de Venn, une liste,...

Exemple : Une urne contient 6 boules : 4 rouges (numérotées de 1 à 4) et 2 bleues (numérotées 5 et 6). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note sa couleur. Calculer la probabilité des événements suivants :
R : "*tirer deux boules rouges*"

Calculons d'abord le nombre de tirages possibles. On cherche ici des paires. Faisons la liste :
$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \ldots, \{1,6\}$ 5 choix,
$\{2,3\}, \{2,4\}, \ldots, \{2,6\}$ 4 choix,
$\{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}$ 3 choix,
$\{4,5\}, \{4,6\}$ 2 choix
$\{5,6\}$ 1 choix

Il y a en tout : $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ tirages possibles

Pour avoir R il ne faut utiliser que les numéros de 1 à 4.

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}$ 3 choix,
$\{2,3\}, \{2,4\}$ 2 choix,
$\{3,4\}$ 1 choix,

Il y a donc : $3 + 2 + 1 = 6$ choix

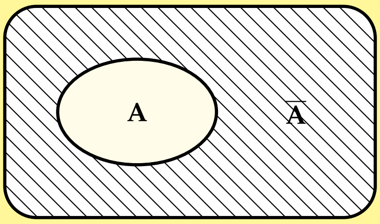
On a donc : $P(\mathrm{R}) = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

3 Opération sur les événements

Remarque : L'étude des probabilités fait appel à la logique mathématique : en effet il s'agit de décoder dans la logique d'un texte les éléments qui serviront aux calculs de probabilités. Les mots les plus importants sont les conjonctions "*et*", "*ou*", et la négation "*ne... pas*" Cette logique mathématique fait appel à l'étude des opérations sur les ensembles. Pour cette raison on définit les opérations suivantes : le complémentaire, l'intersection et l'union. On donnera enfin d'autres opérations qui peuvent se décomposer à l'aide de ces trois opérations de base.

3.1 Événement contraire

Définition 6 : On appelle événement contraire d'un événement A, l'événement noté $\overline{A}$ composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

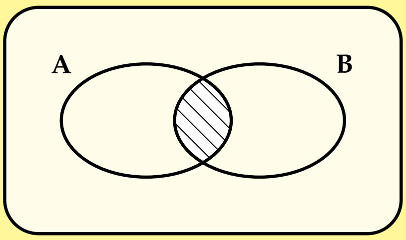


$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Omega \quad \text{et} \quad x \notin A$$

Exemple : On lance un dé parfait. On appelle A l'événement "obtenir un 6". On a donc l'événement contraire $\overline{A}$ l'événement "ne pas obtenir 6 "

3.2 Intersection de deux événements

Définition 7 : On appelle l'intersection de deux événements A et B, l'événement noté $A \cap B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A et à B. On a alors le schéma suivant :



$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$ et $x \in B$

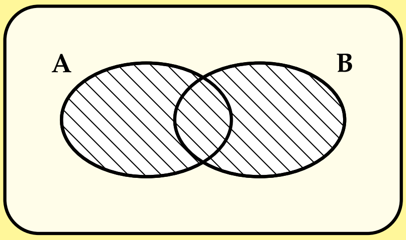
On dit que les événements A et B sont **incompatibles** si et seulement si : $A \cap B = \varnothing$

Exemple : On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Soient les événements
- A : "obtenir deux cœurs"
- B : "obtenir au moins une dame"

L'événement $A \cap B$ est donc : "obtenir la dame de cœur et un autre cœur"

3.3 Union de deux événements

Définition 8 : On appelle union de deux événements A et B, l'événement noté $A \cup B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A ou (non exclusif) à B.
On a alors le schéma suivant :



$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$ ou $x \in B$

On dit que les événements A et $\overline{A}$ forment une **partition** de Ω car :
$A \cup \overline{A} = \Omega \quad$ et $\quad A \cap \overline{A} = \varnothing$

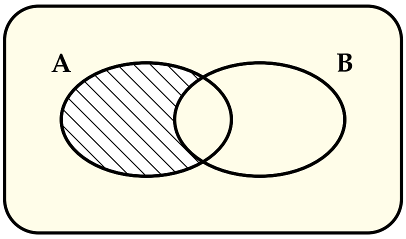
Exemple : On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Soient les événements
- A : "obtenir deux cartes de même valeur"
- B : "obtenir un roi"

L'événement $A \cup B$ est donc : "obtenir deux cartes de même valeur ou un roi et une autre carte de valeur différente"

3.4 Autres opérations et lois de Augustus De Morgan

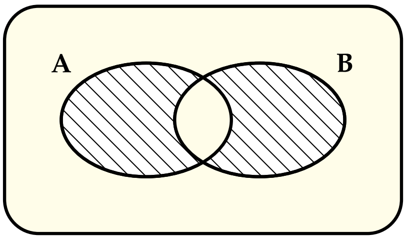
Les opérations peuvent se définir à l'aide du complémentaire, de l'intersection et de l'union de deux ensembles.

- Différence entre deux ensembles : $A - B$



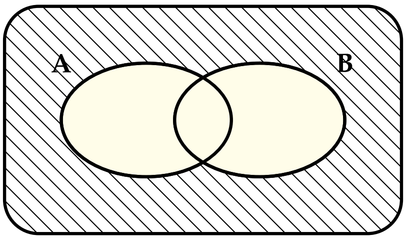
$$x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \cap \overline{B}$$

- Différence symétrique entre deux ensembles ("*ou*" exclusif) : $A \Delta B$

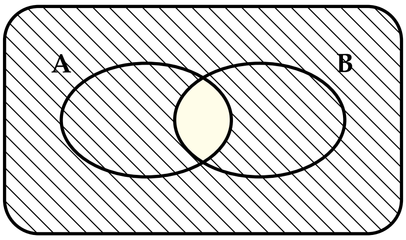


$$x \in A \Delta B \quad \Leftrightarrow \quad (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

- **Lois de Augustus De Morgan :** $\begin{cases} \text{non(A } \textbf{ou} \text{ B)} = \text{non(A) } \textbf{et} \text{ non(B)} \\ \text{non(A } \textbf{et} \text{ B)} = \text{non(A) } \textbf{ou} \text{ non(B)} \end{cases}$



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Remarque : À l'aide de cette dernière égalité, on pourrait définir l'intersection uniquement à l'aide du complémentaire et de l'union

$$A \cap B = \overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

3.5 Utilisation de ces opérations dans une loi de probabilité

Théorème 2 : Si A et B sont deux événements, alors on a :

$$p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$$
$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

Si A et B sont incompatibles, alors : $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$

Exemple : : A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire. Calculer $p(\mathrm{B})$ puis $p(\overline{\mathrm{B}})$. On donne :

$$p(\mathrm{A}) = 0,3 \quad ; \quad p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,7 \quad \text{et} \quad p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,2$$

On calcule d'abord $P(\mathrm{B})$:

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$
$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) - p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$
$$p(\mathrm{B}) = 0,7 - 0,3 + 0,2 = 0,6$$

On calcule ensuite : $p(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - p(\mathrm{B}) = 0,4$

4 Variable aléatoire

4.1 Définition

Définition 9 : Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer à chaque issue e_i de Ω un nombre x_i.

Définir une loi de probabilité de X consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité $P(X = x_i) = p_i$

On a alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Remarque : : Cette dénomination est un abus de langage. D'abord X n'est pas une variable, mais une fonction, définie sur l'univers. Ensuite cette fonction n'a rien d'aléatoire ; elle est parfaitement déterminée.

Exemple : : On lance trois pièces de monnaie identiques. On numérote les pièces 1, 2 et 3. Pour chaque pièce, il y a deux éventualités, soit elle tombe sur face soit sur pile. Si on relève dans l'ordre les résultats des pièces 1, 2 et 3, on obtient $2^3 = 8$ issues possibles.

Si on associe l'apparition d'une pièce sur face avec un gain de 2 € et l'apparition d'une pièce sur pile avec une perte de 1 €, on crée une variable aléatoire X qui à une issue possible associe un gain. cette variable aléatoire X peut donc prendre comme valeur :

- 6 € si les trois pièces tombent sur face
- 3 € si deux pièces tombent sur face et une sur pile
- 0 € si une pièce tombe sur face et deux sur pile
- -3 € si les trois pièces tombent sur pile

On peut visualiser tous les cas à l'aide d'un arbre de dénombrement :

$p(X = 6) = \dfrac{1}{8}$ une issue

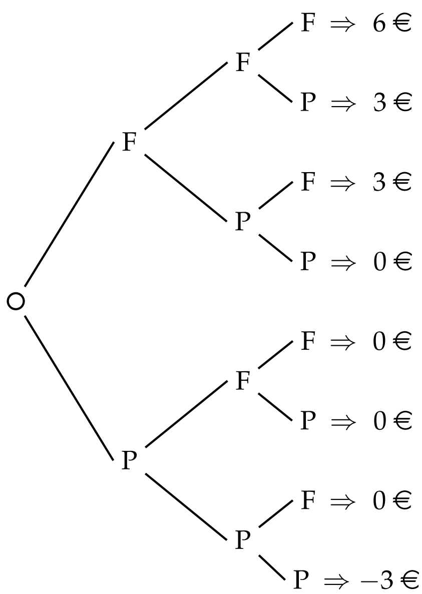
$p(X = 3) = \dfrac{3}{8}$ trois issues

$p(X = 0) = \dfrac{3}{8}$ trois issues

$p(X = -3) = \dfrac{1}{8}$ une issue

On peut résumer la loi de probabilité de X par le tableau suivant :

x_i	6	3	0	-3
$p(X = x_i)$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$



4.2 Espérance, variance et écart type

Définition 10 : On appelle **l'espérance mathématique** de la variable X, la quantité notée $\mathrm{E}(X)$ définie par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

On appelle **variance** et **écart-type** de la variable X, les quantités notées respectivement $\mathrm{V}(X)$ et $\sigma(X)$ définies par :

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \mathrm{E}^2(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque :

- L'espérance mathématique correspond à une moyenne des valeurs prises, pondérées par les probabilités de la loi définie sur X.
  Si X représente le gain pour un jeu, $\mathrm{E}(X)$ représente le gain moyen que peut espérer le joueur. On dit alors que si $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur, si $\mathrm{E}(X) < 0$, le jeu est favorable à l'organisateur et si $\mathrm{E}(X) = 0$ le jeu est équitable.
- La variance correspond à la moyenne des écarts au carré. L'écart-type permet de revenir à un paramètre simple. Plus l'écart-type est grand plus les écarts obtenus entre deux expériences est important.

Exemple : Reprenons le lancer de trois pièces avec X le gain réalisé :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{8} \times 6 + \frac{3}{8} \times 3 + \frac{3}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times (-3) = \frac{6+9+0-3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

En moyenne le joueur peut espérer gagner 1,5 €. Le jeu est donc favorable au joueur.

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \frac{1}{8} \times 6^2 + \frac{3}{8} \times 3^2 + \frac{3}{8} \times 0^2 + \frac{1}{8} \times (-3)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{36+27+0+9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{72}{8} - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75 \\
\sigma(X) &= \sqrt{6{,}75} \simeq 2{,}60
\end{aligned}$$

En moyenne les écarts de gain sont de 2,60 €.

4.3 Arbre pondéré et épreuves répétés

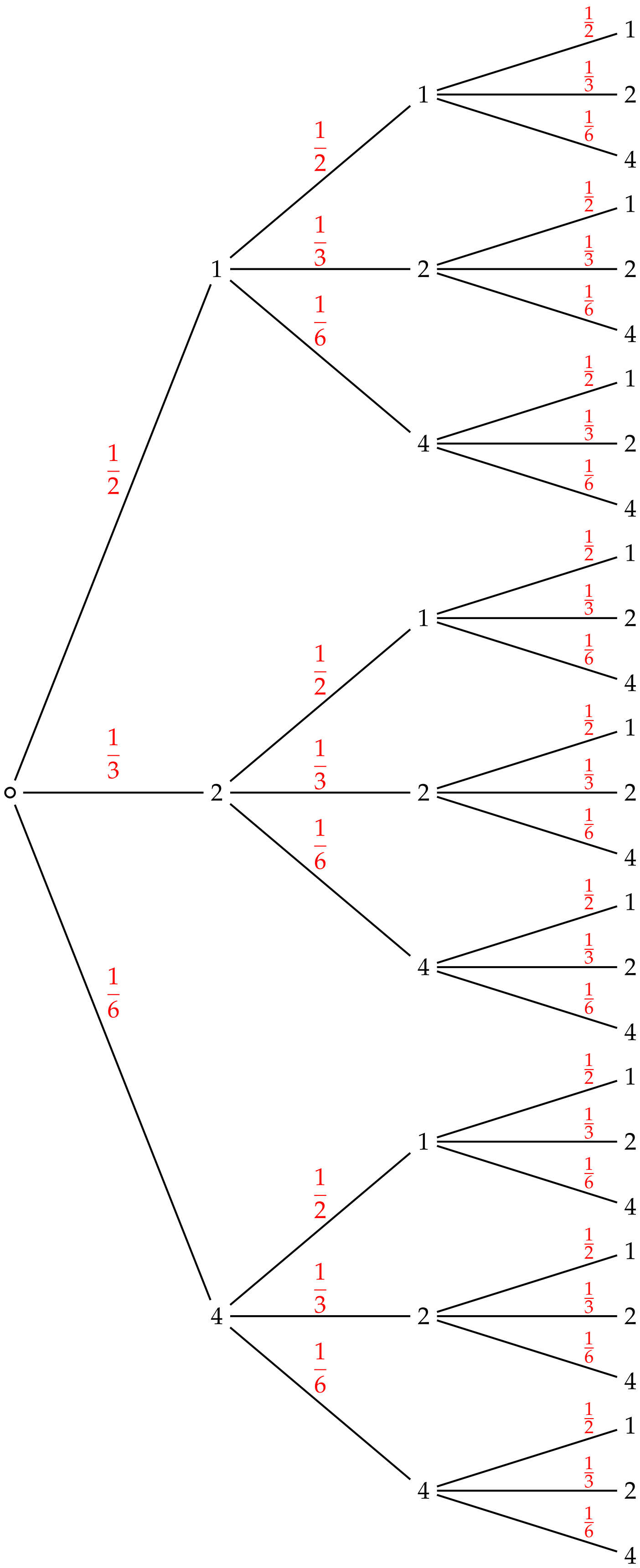
Un dé parfait a ses faces numérotées : 1, 1, 1, 2, 2, 4. On lance ce dé trois fois de suite.
On note de gauche à droite le numéro obtenu. On obtient ainsi un nombre de trois chiffres.

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.

On détermine les probabilités d'obtenir respectivement les faces 1, 2 et 4 :

$$p(1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad p(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p(4) = \frac{1}{6}$$

On établit alors l'arbre de probabilité pondéré suivant correspond aux trois lancers : $3^3 = 27$ lancers possibles



Propriété 1 : Pour remplir et utiliser un arbre de probabilité pondéré, on a les propriétés suivantes :

a) Sur chaque branche de l'arbre, on écrit les probabilités correspondantes.
⚠ pas de pourcentage.

b) La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

c) Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

d) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement.

2) Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A : "*le nombre est 421*"

Il y a qu'un chemin possible le 4 puis le 2 puis le 1 soit :
$$p(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$$

b) B : "*le nombre a trois chiffres différents*"

Il y a 6 chemins possibles correspondants aux nombres :
124, 142, 214, 241, 412, 421 :
$$p(B) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) C : "*le nombre contient au moins une fois le chiffre 2*"

On passe par le complémentaire, ne pas obtenir le chiffre 2, c'est à dire faire 1 ou 4 à chaque lancer :
$$p(\overline{C}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \quad \text{donc} \quad p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

3) On appelle X la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où le chiffre 1 est utilisé dans l'écriture du nombre. Déterminer la loi de probabilité de X.

X peut prendre 4 valeurs possibles : 0, 1, 2, 3

- Pour X = 0 , on fait 2 ou 4 à chaque lancer :
$$p(X = 0) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

- Pour X = 1 , on a 12 chemins correspondants aux nombres :
trois chiffres différents : 124, 142, 214, 241, 412, 421,
deux fois le chiffre 2 : 122, 212, 221
deux fois le chiffre 4 : 144, 414, 441
$$p(X = 1) = \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{3}{18} + \frac{3}{72} = \frac{3}{8}$$

- Pour X = 2 , on a 6 chemins correspondants aux nombres :
  soit une fois le chiffre 2 : 112, 121, 211 soit une fois le chiffre 4 : 114, 141, 411

  $p(\mathrm{X}=2) = 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{12}+\dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$

- Pour X = 3 , un seul nombre 111 : $p(\mathrm{X}=3) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

On peut conclure par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

4) Déterminer l'espérance de la variable X puis en donner une interprétation.

E(X)= $0\times\dfrac{1}{8}+1\times\dfrac{3}{8}+2\times\dfrac{3}{8}+3\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{0+3+6+3}{8} = \dfrac{12}{8} = 1{,}5$

En moyenne sur trois lancers de ce dé, on a 1,5 fois le chiffre 1.

5 Loi binomiale

5.1 Conditions d'application

Épreuve de Bernoulli : expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : succès ou échec. On appelle p la probabilité de succès et $q = 1-p$ la probabilité d'échec.

Exemple : On lance un dé bien équilibré. On appelle succès l'événement obtenir un 6 et échec dans les autres cas. On a alors : $p = \dfrac{1}{6}$ et $q = \dfrac{5}{6}$

Schéma de Bernoulli d'ordre n : expérience aléatoire qui est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
On définit alors la variable aléatoire X représentant le nombre de succès.

On lance 10 fois, dans les mêmes conditions, un dé bien équilibré. On appelle X le nombre de 6 obtenus

5.2 Loi binomiale de paramètres n et p

Théorème 3 : Dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre de succès est définie par :

$$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$

Remarque :

- $\binom{n}{k}$ est un coefficient binomial.
  Il correspond au nombre de possibilités de placer k succès sur n expériences.
- Pour le calculer avec la calculatrice : taper n puis aller dans (math), onglet PRB puis choisir 3 : Combinaison, taper enfin k.
  Par exemple pour calculer $\binom{10}{4}$: 10 Combinaison 4 . On trouve 210.

Exemple :

- On lance 10 fois de suite un dé cubique.
  1) Quelle est la probabilité d'obtenir **exactement** quatre fois un 6
  2) Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** 4 fois un 6

1) Cette expérience peut se ramener à la loi binomiale pourvu que l'on lance le dé toujours de la même façon. Les expériences sont indépendantes et chaque expérience a deux issues : soit faire un 6 ($p = \frac{1}{6}$) soit ne pas faire de 6 ($q = \frac{5}{6}$). Il s'agit donc d'une loi $\mathscr{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$. On a alors :

$$P(X = 4) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6 \simeq 0{,}054\,3$$

Pour obtenir cette probabilité avec la calculatrice : [distrib] choisir 0 : binomFdp.
On tape alors binomFdp(10,$\frac{1}{6}$,4)

2) Si l'on veut obtenir au moins 4 fois un 6, on doit calculer :

$$P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + \cdots + P(X = 10) = 1 - P(X \leqslant 3) \simeq 0{,}069\,7$$

Pour obtenir cette probabilité, on passe par la deuxième expression $P(X \leqslant 3)$ qui correspond à la distribution A : binomFRép . On tape alors $1 -$ binomFRép$(10, \frac{1}{6}, 3)$

5.3 Simulation

Si l'on cherche à vérifier par l'expérience ces probabilités, il est nécessaire d'effectuer ces 10 lancers un grand nombre de fois. Réaliser par exemple 100 fois ces 10 lancers de dé, risque de prendre bien trop de temps. On a alors recours à une simulation avec une calculatrice. La fonction *random* en anglais qui donne "*Aléa*" pour hasard en français, permet de générer un nombre pseudo aléatoire dans l'intervalle $]0\,;\,1[$.
Pour générer un nombre entier entre 1 et 6, simulation d'un lancer de dé, on fabrique alors la fonction $E\,(6 \times Random + 1)$, partie entière de 6 fois le nombre aléatoire plus 1. Sur la calculatrice cela correspond à "*EntAléa*(1,6)" que l'on trouve dans (math) de l'onglet PRB dans le choix 5.
On peut alors proposer pour 100 simulations de 10 lancers de dé, l'algorithme suivant si l'on cherche la probabilité d'obtenir au moins 4 fois un 6.

Pour 5 compilations, on trouve par exemple les résultats suivants :

$$3 - 10 - 13 - 8 - 4$$

soit une moyenne de 7,6.

La probabilité correspondante est alors : $\dfrac{7,6}{100} = 0,076$

L'ordre de grandeur de la probabilité est confirmé, cependant le nombre d'expériences n'est pas encore assez important pour valider la probabilité de 0,0697.

Variables : I, J, X, R, K réels
Entrées et initialisation
  $0 \rightarrow K$
Traitement
  pour I de 1 à 100 **faire**
    $0 \rightarrow X$
    pour J de 1 à 10 **faire**
      $E\,(6 \times Random + 1) \rightarrow R$
      si $R = 6$ **alors**
        $X + 1 \rightarrow X$
      fin
    fin
    si $X \geqslant 4$ **alors**
      $K + 1 \rightarrow K$
    fin
  fin
Sorties : Afficher K

5.4 Propriétés des coefficients binomiaux

Théorème 4 : Pour tous entiers naturels n et k, tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

1) $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$

2) $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$

3) $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$

4) $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$

Remarque : On a la troisième égalité car placer k succès parmi n expériences revient à placer $n - k$ échecs parmi n expériences

Pour comprendre la quatrième égalité, on décompose la répartition de $k+1$ succès sur $n+1$ expériences de la façon suivante :

- Soit il y a succès à la première expérience. Il faut alors répartir k succès sur les n expériences restantes soit $\dbinom{n}{k}$
- Soit il y a échec à la première expérience. Il faut alors répartir $k+1$ succès sur les n expériences restantes soit $\dbinom{n}{k+1}$

Triangle de Pascal

La dernière formule est appelée **formule de Pascal** car elle permet de calculer de proche en proche les coefficients du triangle de Pascal :

On a pour les cases rouges :

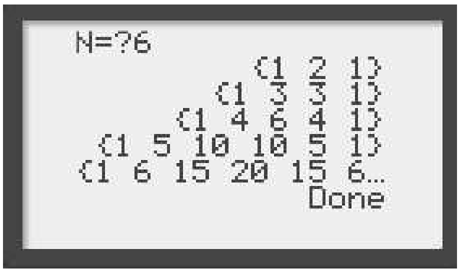
$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$$

ce qui donne $4 + 6 = 10$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

On peut proposer l'algorithme suivant permettant de déterminer le triangle de Pascal. On utilise un double compteur permettant de déterminer la ligne $i+1$ en fonction de la ligne i.

On obtient pour $N = 6$ l'écran suivant



Variables : L_1, L_2 listes
N, I, K entiers
Entrées et initialisation
Lire N $(N \geqslant 2)$
Effacer L_1 et L_2
$1 \to L_1(1)$
$1 \to L_1(2)$
$1 \to L_2(1)$
Traitement
pour I de 2 à N **faire**
pour K de 2 à I **faire**
$L_1(K-1) + L_1(K) \to L_2(K)$
fin
$1 \to L_2(I+1)$
pour K de 2 à $(I+1)$ **faire**
$L_2(K) \to L_1(K)$
fin
Sorties : Afficher L_1
fin

5.5 Espérance et variance

Théorème 5 : X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, alors l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$, la variance $\mathrm{V}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ sont égales à :

- $\mathrm{E}(X) = np$
- $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple : Une urne contient 10 boules (indiscernables au toucher) : 4 boules sont rouges et les autres sont noires. On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant la boule à chaque tirage. Quel nombre moyen de boules rouges peut-on espérer ? Avec quelle variance et quel écart type.

On tire un boule de l'urne, on appelle succès le tirage d'une boule rouge donc $p = 0,4 \quad q = 0,6$.
On réitère 6 fois cette expérience de façon identique et indépendante et l'on appelle X le nombre de boules rouges obtenus. X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(6\,;\,0,4)$.
On a alors :

$$\mathrm{E}(X) = 6 \times 0,4 = 2,4; \quad \mathrm{V}(X) = 6 \times 0,4 \times 0.6 = 1,44; \quad \sigma(X) = \sqrt{1,44} = 1,2$$

On tire en moyenne 2,4 boules rouges avec un écart moyen de 1,2.