Les trois sortes de tirages

Introduction

Comme nous l'avons vu, dans une loi équirépartie, il est nécessaire de dénombrer les cas favorables et les cas possibles. On est conduit à trouver une procédure pour dénombrer ces cas. Une procédure très efficace, consiste à assimiler l'expérience à un des tirages suivants :
- Tirage simultané
- Tirages successifs sans remises
- Tirages successifs avec remise

Analysons ces différents cas de figures par des exemples.

1 Tirage simultané

Un groupe de cinq personnes est constitué de 2 femmes, désignées par f_1 et f_2, et de trois hommes, désignés par h_1, h_2 et h_3.
Chacun donne sa carte de visite et on place les cinq cartes dans une urne. On effectue alors un tirage simultané de deux cartes.

1) Écrire les issues possibles.

   L'ensemble univers Ω est : $\Omega = \{f_1, f_2, h_1, h_2, h_3\}$

   Lorsqu'on tire deux cartes, on obtient un sous ensemble de Ω à deux éléments. Il s'agit de répertorier tous les sous ensembles à deux éléments :

   - Sous ensemble contenant f_1 : $\{f_1, f_2\}$, $\{f_1, h_1\}$, $\{f_1, h_2\}$, $\{f_1, h_3\}$
   - Sous ensemble contenant f_2, mais pas f_1 : $\{f_2, h_1\}$, $\{f_2, h_2\}$, $\{f_2, h_3\}$
   - Sous ensemble contenant h_1, mais ni f_1 ni f_2 : $\{h_1, h_2\}$ $\{h_1, h_3\}$
   - Sous ensemble contenant h_2, mais ni f_1, ni f_2 et ni h_1 : $\{h_2, h_3\}$

   Il y a donc $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ tirages possibles

   Remarque : : Ces différents tirages possibles s'appelle des combinaisons de 2 éléments parmi 5 qui correspond au coefficient binomial $\binom{5}{2} = 10$.

2) Calculer les probabilités des événements suivants :

   - H : "*le tirage donne les cartes de deux hommes*"

     On suppose que les cartes de visite sont indiscernables au toucher ce qui se traduit par une loi équirépartie. On compte alors le nombre de sous-ensembles à deux éléments qui ne contiennent que des hommes, on en dénombre 3 donc :

     $$p(\text{H}) = \frac{3}{10} = 0,3$$

- F : "*le tirage donne les cartes de deux femmes*"

  Il n'y a qu'un seul tirage qui contient que des femmes, donc :

$$p(\mathrm{F}) = \frac{1}{10} = 0,1$$

- D : "*le tirage donne les cartes de deux personnes de sexes opposés*"

  On dénombre 6 tirages composés d'un homme et d'une femme.

$$p(\mathrm{D}) = \frac{6}{10} = 0,6$$

Remarque : On peut remarquer que l'événement D est le complémentaire de $\mathrm{H} \cup \mathrm{F}$.

$$\mathrm{D} = \overline{\mathrm{H} \cup \mathrm{F}}$$

2 Tirages successifs sans remise

2.1 Exemple 1

À la course du tiercé, il y a vingt chevaux au départ. À l'arrivée, il n'y a pas d'ex-æquo. On mise sur trois numéros.

1) Calculer la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre. (Il s'agit d'avoir les numéros des trois premiers chevaux dans l'ordre d'arrivée.)

Pour connaître le nombre tiercés possibles, il faut déterminer le nombre de triplets possibles avec 20 éléments. On peut assimiler un triplet à trois tirages successifs sans remise dans une urne contenant 20 boules, indiscernables au toucher. Une fois une boule tiré, on ne la remet pas dans l'urne.

On a alors 20 boules pour le premier tirage, 19 pour le second et 18 pour le troisième, on a donc :

$$20 \times 19 \times 18 = 6\,840 \text{ tiercés possibles}$$

Il y a bien sûr qu'un seul tiercé dans l'ordre possible. La probabilité d'avoir le tiercé dans l'ordre est donc :

$$p(\text{ordre}) = \frac{1}{6840} \simeq 0{,}000\,146 \quad \text{soit} \quad 0,0146\ \%$$

Remarque : Le nombre triplets possibles, s'appelle un arrangement de 3 éléments parmi 20, on le note : A_{20}^{5}.

2) Calculer la probabilité de gagner le tiercé dans le désordre. (Il s'agit d'avoir les numéros des trois premiers, mais pas dans l'ordre d'arrivée.)

Il s'agit ici de dénombrer toutes les permutations possible d'un triplets (a, b, c). Permuter signifie changer de place. On fait la liste des triplets que l'on peut écrire avec les lettres a, b et c.

$$(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a)$$

Sur le 6 triplets possibles, on enlève celui qui donne le tiercé dans l'ordre, on a donc la probabilité d'avoir le tiercé dans le désordre :

$$p(\text{désordre}) = \frac{5}{6840} = \frac{1}{1368} \simeq 0{,}000\,730 \quad \text{soit} \quad 0,0730\ \%$$

2.2 Exemple 2

On désigne par Ω l'ensemble des anagrammes du mot MARIE (p. ex. AMRIE). Un anagramme n'est pas nécessairement un nom du dictionnaire.

1) Déterminer le nombre d'anagrammes possible avec le mot MARIE.

   On peut supposer que le nombre d'anagrammes peut être assimilé à 5 tirages successifs sans remises. Il s'agit donc de trouver toutes les permutations du mot MARIE.
   Comme toutes les lettres sont différentes, il a 5 choix possibles pour la première, 4 pour la seconde, 3 pour la troisième, 2 pour la quatrième et 1 pour la dernière. On a donc :

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad \text{anagrammes possibles}$$

2) Déterminer les probabilités des événements suivants :

   - A : "*on obtient le mot AIMER*"

$$p(\mathrm{A}) = \frac{1}{120}$$

   - B : "*le mot commence par une voyelle*"

     Il y trois voyelles dans le mot MARIE, donc on a 3 choix pour la première lettre, le choix des autres lettres étant indifférent.

$$p(\mathrm{B}) = \frac{3}{5}$$

   - C : "*le mot se termine par une consonne*"

     Le choix des 4 première lettres étant indifférent, comme il y a deux consonnes, on a donc :

$$P(\mathrm{C}) = \frac{2}{5}$$

   - D : "*le mot commence par une voyelle ou se termine par une consonne*"

     On a donc $\mathrm{D} = \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$, comme on a :

$$p(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) - P(\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$$

     Il nous faut déterminer la probabilité de $\mathrm{B} \cap \mathrm{C}$, c'est à dire que le mot commence par une voyelle et se termine par une consonne. Il y a 3 choix pour la première lettre, 2 choix pour la dernière, 3 choix pour la deuxième, 2 pour la troisième et 1 pour la quatrième, donc :

$$p(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \frac{3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{3}{10}$$

     On a donc :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) &= P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) - P(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{10} \\ &= \frac{7}{10} \\ &= 0{,}7 \end{aligned}$$

3 Tirages successifs avec remise

3.1 Exemple 1

On place au hasard trois chemises de couleurs bleue, blanche et rouge dans 4 tiroirs a, b, c, d. Chaque répartition est équiprobable.

1) Combien y a t-il de répartitions possibles ?

   On peut procéder ainsi : pour la première chemise, on tire au hasard une boule dans un urne contenant 4 boules notés a, b, c et d puis on remet la boule tiré dans l'urne et l'on procède de façon identique pour les 2 autres chemises. Il y a donc 4 choix pour chaque chemise, donc il y a :

$$4^3 = 64 \quad \text{répartitions possibles}$$

   Remarque : : Si l'on fait p tirages avec remise dans un urne qui contient n éléments, on a n^p tirages possibles

2) Calculer la probabilités des événements suivants :

   - M : "*toutes les chemises sont dans le même tiroir*"

     les chemises sont dans le tiroir a, b, c ou d donc :

$$p(\mathrm{M}) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

   - V : "*les tiroirs b et c sont vide*"

     Pour chaque chemise, nous n'avons que deux tiroirs possibles donc :

$$p(\mathrm{V}) = \frac{2^3}{64} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

3.2 Exemple 2

On lance un dé équilibré quatre fois de suite et on considère le nombre formé par les quatre numéros pris dans l'ordre de sortie. Ω désigne l'ensemble des issues possibles, muni de la loi équirépartie.

1) Calculer le nombre d'issues possibles.

   Pour chaque lancement, il y a 6 choix possibles, donc il y a :

$$6^4 = 1\,296 \quad \text{issues possibles}$$

2) Calculer les probabilités des événements suivants

   - A : "*le nombre est* 4 211"

$$p(\mathrm{A}) = \frac{1}{1\,296}$$

   - B : "*le nombre est formé de 4 chiffres distincts*"

     Pour le premier chiffre, il y a 6 choix possibles, pour le second 5, le troisième 4 et le dernier 3. On a donc :

$$p(\mathrm{B}) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1\,296} = \frac{360}{1\,296} = \frac{5}{18}$$

- C : "*le nombre est pair*"

  Pour que le nombre soit pair, il peut se terminer par 2,4 ou 6. Comme le choix des trois premiers chiffres est indifférent, on a :

  $$p(\mathrm{C}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- D : "*le nombre est multiple de 101*"

  Tout multiple de 101 est de la forme $k \times 101$. Comme le nombre le plus grand que l'on peut formé est 6 666, donc $k < 60$. En transcrivant le nombre dans la numération en base 10, on a :

  $$k \times 101 = k \times 100 + k$$

  Le nombre est formé de k unités et k centaines, il est donc de la forme $\overline{abab}$. donc k est un nombre de deux chiffres formé à l'aide de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, il y a 6^2 choix possibles.

  $$p(\mathrm{D}) = \frac{6^2}{1\,296} = \frac{1}{36}$$