

Contrôle de mathématiques

Jeudi 25 novembre 2010

Exercice 1

Résolution du troisième degré (4 points)

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 7x + 21$$

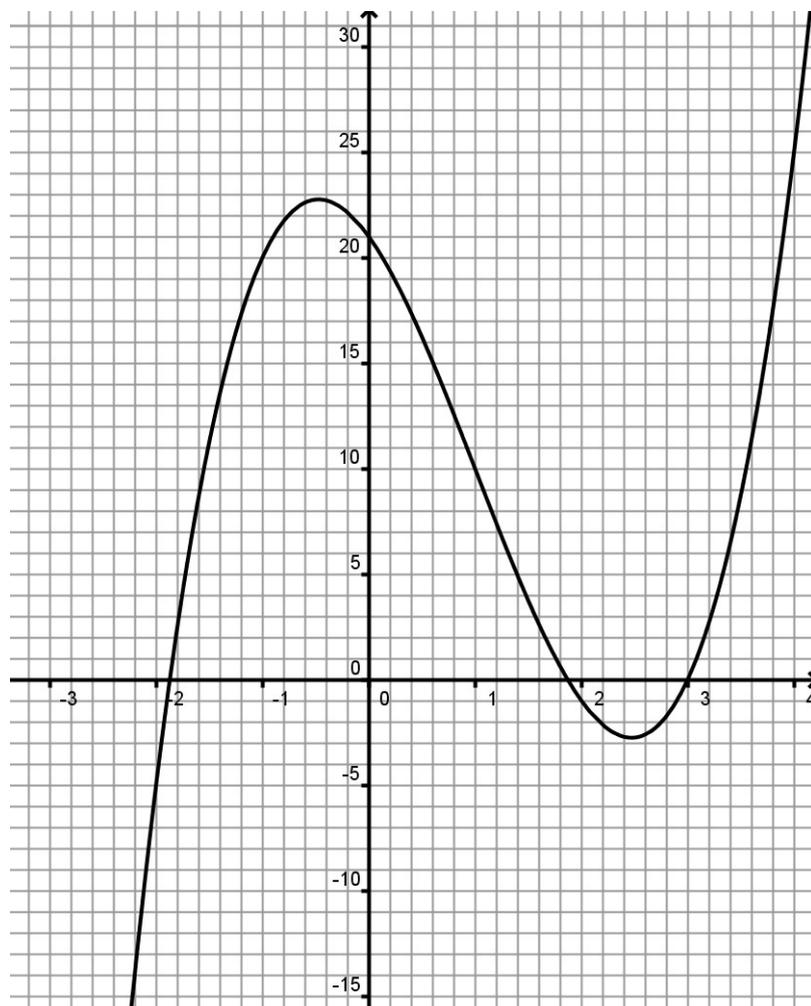
Sa représentation graphique est donnée ci-dessous.

- 1) Déterminer graphiquement le nombre de racines de f .
Donner une valeur approchée de chacune d'elle.
- 2) Montrer qu'il existe un unique triplet de réels $(a; b; c)$, que l'on déterminera, tel que pour tout réel x :

$$f(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$$

- 3) Déterminer les valeurs exactes des racines de f .
- 4) Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$f(x) \leq -x + 11$$



Exercice 2

Inéquation (3 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Démontrer que f est une fonction positive sur \mathbb{R}
- 3) Étudier la parité de f .
- 4) À l'aide de votre calculatrice, résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 1$

Exercice 3

Fonction irrationnelle (5 points)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

- 1) Déterminer son ensemble de définition.
- 2) Étudier la parité de la fonction f . Que peut-on en déduire graphiquement ?
- 3) En vous aidant de votre calculatrice, tracer soigneusement la représentation graphique \mathcal{C}_f de la fonction f . On prendra comme unité graphique 1 cm = 0,5 sur les deux axes.
- 4) Démontrer que la fonction f admet un maximum $M = 2$. Pour quel valeur de x ce maximum est-il atteint ?

Aide : on pourra déterminer le signe de $[f(x)]^2 - 4$.

- 5) Soit la fonction g définie par $g(x) = -x\sqrt{4-x^2}$. Comment déduit-on la courbe représentative \mathcal{C}_g de la fonction g à partir de la courbe \mathcal{C}_f (on se justifiera). Tracer alors soigneusement \mathcal{C}_g sur le même graphique que la question 3)

Exercice 4

Centre de symétrie. (3points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

Montrer, par un changement de repère, que le point $I(1; 2)$ est centre de symétrie de la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f .

Exercice 5

Composition de fonctions. (5 points)

1. Soit f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} . Dans les deux cas suivants, déterminer les expressions de $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.
 - a) $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = 3 - x$
 - b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ et $g(x) = 2x - 3$

2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ par : $h(x) = \frac{2}{3x - 1}$

Décomposer h à l'aide de deux fonctions de référence f et g . On posera $h = g \circ f$.

3. On donne la fonction k définie par : $k(x) = \sqrt{1 - 2x}$.
 - a) Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction k .
 - b) Décomposer k en deux fonctions de référence f et g . On posera $k = g \circ f$.
 - c) Déterminer les variations de la fonction k sur I .