# Contrôle de mathématiques

## Correction du jeudi 26 mai 2011

### Exercice 1

**Produit scalaire (2 points)**

**Théorème de la projection :** Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Soit $H$ et $K$ les projections orthogonales respectives de $C$ et $D$ sur la droite $(AB)$, alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$$

En appliquant ce théorème, on trouve :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \times BC = 3\\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BC} = -CH \times BC = -6\end{aligned}$$

### Exercice 2

**Règles de calcul (3 points)**

1) On développe :

$$(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}$$

comme $ABCD$ est un rectangle et $I \in [DC]$, on a : $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$ et $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$

$$(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} + DA^2$$

2) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} &= (\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB})\\ &= \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} + DA^2\\ &= -ID \times IC + DA^2\\ &= -3 + 9\\ &= 6\end{aligned}$$

De plus, on a : $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = IA \times IB \cos\left(\widehat{AIB}\right)$ (1)

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}IA^2 &= DI^2 + DA^2 = 1 + 9 = 10\\ IB^2 &= IC^2 + CB^2 = 9 + 9 = 18\end{aligned}$$

De la relation (1), on en déduit :

$$\cos\left(\widehat{AIB}\right) = \frac{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}}{IA \times IB} = \frac{6}{\sqrt{10} \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

On en déduit : $\widehat{AIB} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \simeq 63°$

## Exercice 3

**Dans un cercle (3 points)**

1) Les triangles $ADB$ et $ACD$ sont rectangles respectivement en $B$ et $C$ car $[AD]$ est un diamètre du cercle $(C)$.
   La projection orthogonale de $[AD]$ est donc $[AB]$ et $[AC]$ respectivement sur les droites $(AB)$ et $(AC)$. D'après le théorème de la projection on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC^2$$

2) On a d'après les relations du 1) :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} \end{aligned}$$

## Exercice 4

**Orthogonalité (2 points)**

Pour que $AMB$ soit rectangle en $M$, on doit avoir $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \quad (1)$

On calcule les coordonnées de : $\overrightarrow{AM} = (x; -1)$ et $\overrightarrow{BM} = (x-5; -4)$

La relation (1) donne :

$$x(x-5) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

On trouve alors deux solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$

## Exercice 5

**Ensemble de points (4 points)**

1) On transforme la relation :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= 7 \\ \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) &= 7 \\ MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\right) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} &= 7 \end{aligned}$$

on a : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$

$$\begin{aligned} MI^2 - \frac{AB^2}{4} &= 7 \\ MI^2 &= 7 + \frac{36}{4} \\ MI^2 &= 16 \end{aligned}$$

$\mathscr{E}_1$ est donc le cercle de centre $I$ et de rayon 4.

2) On transforme la relation :

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= 0 \\ \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) &= 0 \\ \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{MI} &= 0 \end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{BA}$

$\mathscr{E}_2$ est donc la droite perpendiculaire à $(AB)$ qui passe par $I$. C'est donc la médiatrice de $[AB]$.

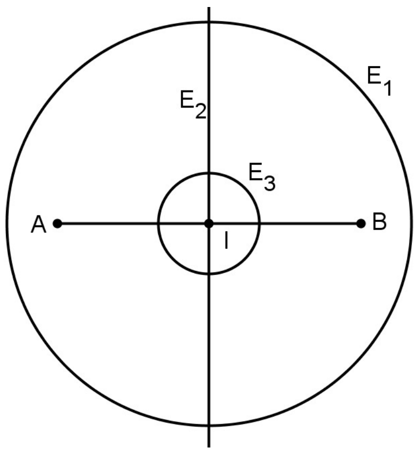
3) On transforme la relation :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= 20 \\ \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 &= 20 \\ 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + IA^2 + IB^2 &= 20 \end{aligned}$$

on a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

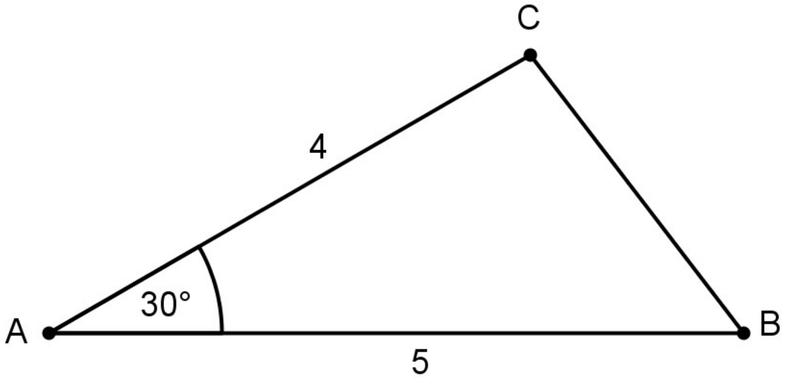
$$\begin{aligned} 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} &= 20 \\ MI^2 &= 10 - 9 \\ MI^2 &= 1 \end{aligned}$$

$\mathscr{E}_3$ est donc le cercle de centre $I$ et de rayon 1.



## Exercice 6
**Mesures dans un triangle (3 points)**

1) On obtient la figure suivante :




2) Cf cours

3) On a par la relation d'Al Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 25 + 16 - 20\sqrt{3} = 41 - 20\sqrt{3}$$

On obtient alors $BC = \sqrt{41 - 20\sqrt{3}} \simeq 2,52$

On trouve un second angle avec un autre côté :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos\left(\widehat{ABC}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC}$$

On obtient alors : $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{50 - 20\sqrt{3}}{10\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}} \simeq 0,609$ donc $\widehat{ABC} \simeq 52^\circ$

On obtient alors le 3e angle par différence : $\widehat{ACB} \simeq 98^\circ$

## Exercice 7
**Trigonométrie (3 points)**

1) a) De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, et comme $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad \sin a = \frac{4}{5}$$

$$\cos^2 b = 1 - \sin^2 b = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) On en déduit alors :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\\ &= \frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\\ &= \frac{3\sqrt{3}-4}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\\ &= \frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{4\sqrt{3}+3}{10}\end{aligned}$$

2) a) On a :

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

On en déduit :

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

b) On a alors :

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$