Correction du devoir de mathématiques
Du 02 novembre 2015

EXERCICE 1

Représentations graphiques **(2,5 points)**

Pour associer une courbe à une fonction, on utilisera la direction de la parabole et une image judicieusement choisie.

a) $f_1(x) = -x^2 + 2x - 3$
La courbe de f_1 est dirigée vers le bas car son coefficient $a = -1$ devant x^2 est négatif. De plus $f_1(0) = -3$. Sa courbe est $\mathscr{C}_5$

b) $f_2(x) = x^2 + x + 3$ La courbe de f_2 est dirigée vers le haut car son coefficient $a = 1$ devant x^2 est positif. De plus $f_2(-1) = 1 - 1 + 3 = 3$. Sa courbe est $\mathscr{C}_1$

c) $f_3(x) = 2x^2 - 5x + 3$
La courbe de f_3 est dirigée vers le haut car son coefficient $a = 2$ devant x^2 est positif. De plus $f_3(1) = 2 - 5 + 3 = 0$. Sa courbe est $\mathscr{C}_3$

d) La courbe de f_4 est dirigée vers le bas car son coefficient $a = -2$ devant x^2 est négatif. De plus $f_4(0) = 3$. Sa courbe est $\mathscr{C}_4$

e) La courbe de f_5 est dirigée vers le haut car son coefficient $a = 1$ devant x^2 est positif. De plus $f_5(0) = \dfrac{1}{4}$. Sa courbe est $\mathscr{C}_2$

EXERCICE 2

Forme canonique **(2 points)**

1) $f(x) = -2x^2 + 8x - 13 = -2(x^2 - 4x) - 13 = -2[(x-2)^2 - 4] - 13 = -2(x-2)^2 + 8 - 13$
$= -2(x-2)^2 - 5$

2) Le coefficient devant x^2 étant négatif, la fonction f admet un maximum.
De plus $\alpha = 2$ et $\beta = -5$. Le maximum est donc -5 obtenu pour $x = 2$

EXERCICE 3

Équations et inéquations **(6,5 points)**

1) $-3x^2 + 2x - 3 = x - 1 \quad\Leftrightarrow\quad -3x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$. L'équation n'admet pas de solution $S = \varnothing$

2) $\dfrac{x+1}{x-3} < x$. On détermine l'ensemble de définition, on annule le second terme et l'on réduit au même dénominateur. On fait ensuite un tableau de signes.

$$\frac{x+1}{x-3} < x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x+1-x^2+3x}{x-3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-x^2+4x+1}{x-3} < 0$$

$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

Valeurs frontières : $-x^2 + 4x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \Delta = 16 + 4 = 20 = (2\sqrt{5})^2$

$\Delta > 0$, deux racines : $x_1 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{5}}{-2} = 2 - \sqrt{5}$ et $x_2 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{5}}{-2} = 2 + \sqrt{5}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		3		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$-x^2+4x+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x^2+4x+1}{x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S =]-2-\sqrt{5}\,;\,3[\cup]2+\sqrt{5}\,;\,+\infty[$

3) $\dfrac{4x^2 + 4x - 15}{-2x^2 + 3x - 4} \leqslant 0$

On détermine l'ensemble de définition, les valeurs frontières puis le signe de la quantité.

Valeurs interdites : $-2x^2 + 3x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \Delta = 9 - 32 = -23 < 0$
Pas de valeur interdite donc $D_f = \mathbb{R}$

Valeurs frontières : $4x^2 + 4x - 15 = 0 \;\Rightarrow\; \Delta = 16 + 240 = 256 = 16^2$

$\Delta > 0$, deux racines : $x_1 = \dfrac{-4 + 16}{8} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-4 - 16}{8} = -\dfrac{5}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2+4x-15$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-2x^2+3x-4$		$-$		$-$		$-$	
$\dfrac{4x^2+4x-15}{-2x^2+3x-4}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$

4) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

On pose $X = x^2$. On a alors $X \geqslant 0$

L'équation devient : $X^2 - X - 6 = 0$, on calcule $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$

$\Delta > 0$, 2 racines, $X_1 = \dfrac{1+5}{2} = 3$ et $X_2 = \dfrac{1-5}{2} = -2 < 0$ (non retenue)

On revient à x : $x^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = -\sqrt{3}$

$S = \left\{-\sqrt{3}\,;\ \sqrt{3}\right\}$

EXERCICE 4

Problème de triangle **(4 points)**

1) $x \in [0\,;\ 2]$

2) Pour calculer MI^2 et MC^2, on utilise le théorème de Pythagore dans les triangles respectifs IAM et MDC rectangles en A et D.

$$\begin{aligned} f(x) = \mathrm{MI}^2 + \mathrm{MC}^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 + (2-x)^2 + 2^2 \\ &= \frac{1}{4} + x^2 + 4 - 4x + x^2 + 1 \\ &= 2x^2 - 4x + \frac{21}{4} \end{aligned}$$

3) Pour dresser le tableau de variation de la fonction f, on cherche la forme canonique :

$$f(x) = 2(x^2 - 2x) + \frac{21}{4} = 2[(x-1)^2 - 1] + \frac{21}{4} = 2(x-1)^2 - 2 + \frac{21}{4} = 2(x-1)^2 + \frac{13}{4}$$

x	0		1		2
$f(x)$	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	$\frac{13}{4}$	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

4) a) Si le triangle IMC est rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\mathrm{MI}^2 + \mathrm{MC}^2 = \mathrm{IC}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{MI}^2 + \mathrm{MC}^2 = \mathrm{ID}^2 + \mathrm{DC}^2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

On a donc : $\quad f(x) = \dfrac{17}{4}$

b) Il faut résoudre $\quad f(x) = \dfrac{17}{4}$ on prend la forme canonique :

$2(x-1)^2 + \dfrac{13}{4} = \dfrac{17}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = \dfrac{1}{2}$

d'où $\quad x - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\quad x - 1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On trouve alors : $\quad x = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\quad x = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 5

Équation paramétrique **(2,5 points)**

a) (E) admet une solution unique si, et seulement si, $\Delta_m = 0$

$\Delta_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m+1)^2 - 4(-m^2+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + 2m + 1 + 4m^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$5m^2 + 2m - 3 = 0$

$m_1 = -1$ est racine évidente car $5 - 2 - 3 = 0$ or $P = -\dfrac{3}{5}$ donc $\quad m_2 = \dfrac{3}{5}$

(E) admet une unique solution si, et seulement si, $\quad m = -1$ ou $m = \dfrac{5}{3}$

b) (E) admet 2 solutions réelles distinctes si, et seulement si, $\Delta_m > 0$

donc $5m^2 + 2m - 3 > 0$, on prend à l'extérieur des racines $m \in]-\infty ; -1[\cup \left]\dfrac{3}{5} ; +\infty\right[$

EXERCICE 6

Algorithme **(2,5 points)**

Variables : m, p, x_1, x_2
Entrées et initialisation
  Lire m, Lire p
Traitement et sorties
  si $m = 0$ **alors**
    si $p = 0$ **alors**
      Afficher "tout x est solution"
    sinon
      Afficher "pas de solution"
    fin
  sinon
    si $p = 0$ **alors**
      Afficher "0 est l'unique solution"
    sinon
      si $\dfrac{p}{m} > 0$ **alors**
        $\sqrt{\dfrac{p}{m}} \longrightarrow x_1$
        $-\sqrt{\dfrac{p}{m}} \longrightarrow x_2$
        Afficher "l'équation a 2 solutions"
        Afficher x_1
        Afficher x_2
      sinon
        Afficher "Pas de solution"
      fin
    fin
  fin