Contrôle de mathématiques

Mercredi 01 février 2017

EXERCICE 1

Monotonie d'une suite **(2 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$

1) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5}{(n+4)(n+3)}$.
2) Que peut-on dire sur la monotonie de la suite (u_n) ?

EXERCICE 2

Suite arithmétique et suite géométrique **(5 points)**

1) La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
   On donne $u_{10} = -12$ et $u_{20} = -32$.
   a) Déterminer la raison r et le premier terme u_0.
   b) Calculer u_{100}
2) Calculer la somme S : $S = 9 + 12 + 15 + \cdots + 123 + 126$.
3) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.
   On donne $v_5 = 135$ et $v_8 = 3\,645$
   a) Déterminer la raison q et le premier terme v_0 en fraction irréductible
   b) Calculer la somme : $S_8 = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_8$. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

EXERCICE 3

Limite d'une suite **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b) La suite (u_n) est-elle géométrique ? Pourquoi ?
2) On pose pour tout entier n, $v_n = u_n - 4$
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on donnera la raison q et le premier terme v_0.
   b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 4

Visualisation d'une suite **(3 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$

Sur l'annexe est tracé la courbe représentative de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

1) a) Construire, sur le graphique, les 4 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses. On laissera les traits de construction.

   b) À quoi sert la droite d'équation $y = x$ sur le graphique ?

   c) Conjecturer la monotonie et la convergence de la suite (u_n)

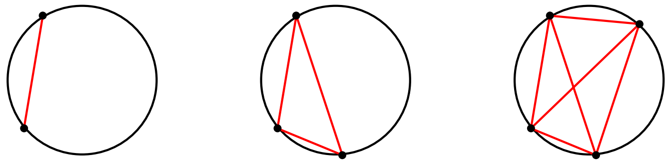
2) Recopier puis compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine à partir de quel rang n, le terme u_n se trouve à moins de 10^{-3} de la limite de la suite.

Variables : N : entiers et U réel
Entrées et initialisation
    $\cdots \rightarrow N$
    $\cdots \rightarrow U$
Traitement
    tant que $|U - 1| \ldots\ldots$ **faire**
        $\cdots \rightarrow N$
        $\ldots\cdots \rightarrow U$
    fin
Sorties : Afficher ...

Exercice 5

Segments **(5 points)**

On place sur un cercle n points distincts et l'on s'intéresse au nombre p_n de segments ayant pour extrémité deux de ces points.



1) Déterminer les valeurs de p_3, p_4 et p_5.

2) n points sont placés et les p_n segments étant tracés, on ajoute un nouveau point distinct des précédents. Combien de nouveaux segments peut-on tracer ?
   En déduire une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

3) En écrivant les lignes :

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 \\ p_3 &= p_2 + \ldots \\ p_4 &= p_3 + \ldots \\ \ldots &= \ldots \\ p_n &= p_{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

et en additionnant termes à termes, déterminer p_n en fonction de n

4) On voudrait connaître le nombre de points nécessaires pour tracer 1 035 segments. Pour cela, on écrit l'algorithme suivant :

   Recopier puis compléter l'algorithme puis donner la valeur que renvoie l'algorithme.

Variables : N, P : entiers
Entrées et initialisation
    $1 \rightarrow P$
    $2 \rightarrow N$
Traitement
    tant que $\ldots\ldots$ **faire**
        $P + N \rightarrow P$
        $N + 1 \rightarrow N$
    fin
Sorties : Afficher ...

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 4

(À rendre avec la copie)