Équations irrationnelles

1 Équation du type $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$.

Pour que cette équation soit définie, il faut que :

$$A(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad B(x) \geqslant 0$$

Cela nous donne donc l'ensemble de définition D_f de l'équation.
Pour résoudre, on élève au carré, en ayant soin de dire que $x \in D_f$

Exemple : Soit l'équation suivante :

$$\sqrt{4x-1} = \sqrt{3-x}$$

On détermine l'ensemble de définition D_f

$$\begin{cases} 4x-1 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{4} \\ x \leqslant 3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad D_f = \left[\frac{1}{4}; 3\right]$$

On élève au carré :

$$x \in D_f \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} 4x-1 &= 3-x \\ 5x &= 4 \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{5} \in D_f \qquad \text{donc} \qquad S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$$

2 Équation du type $\sqrt{A(x)} = B(x)$.

Pour que cette équation soit définie, il faut que :

$$A(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad B(x) \geqslant 0$$

En fait la première condition est superflue car si l'on élève au carré l'équation, on obtient :

$$A(x) = [B(x)]^2$$

Si l'égalité est vérifiée alors $A(x)$ est nécessairement positif ou nul.

Conclusion : l'équation est équivalente à : $B(x) \geqslant 0$ et $A(x) = [B(x)]^2$

<u>Exemple</u> : Soit l'équation suivante :

$$\sqrt{x^2 - 1} = x + 2$$

On détermine l'ensemble de définition :

$$x + 2 \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad x \geqslant 2 \quad \text{soit} \quad D_f = [-2; +\infty[$$

On élève au carré

$$x \in D_f \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x^2 - 1 &= (x+2)^2 \\ x^2 - 1 &= x^2 + 4x + 4 \\ -4x &= 5 \\ x &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$-\frac{5}{4} \in D_f \qquad \text{donc} \qquad S = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$$