Révision d'algèbre

Table des matières

1 Équation du premier degré

Théorème 1 :

Toute équation du premier degré peut se mettre sous la forme :

$$ax = b$$

1. Si $a \neq 0$ alors l'équation n'a qu'une solution $x = \dfrac{b}{a}$
2. Si $a = 0$ et $b = 0$ alors tout x est solution $S = \mathbb{R}$.
3. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation n'a pas de solution $S = \varnothing$

Exemple : Soit l'équation suivante : $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{3(x-2)}{4} = \dfrac{-7x+2}{12} + 2$

Pour éviter de "trainer" des dénominateurs, multiplions par le dénominateur commun 12

$$\begin{aligned}(\times 12) \quad 4(x+2) - 9(x-2) &= -7x + 2 + 24 \\ 4x + 8 - 9x + 18 &= -7x + 2 + 24 \\ 4x - 9x + 7x &= -8 - 18 + 2 + 24 \\ 2x &= 0 \\ x &= 0\end{aligned}$$

on conclut par l'ensemble solution

$$S = \{0\}$$

2 Équation se ramenant au premier degré

2.1 Équation rationnelle

Pour une équation rationnelle, en ayant soin de préciser l'ensemble de définition D_f , on multiplie l'équation par le dénominateur commun ou éventuellement on effectue un produit en croix.

Exemple 1 : Soit l'équation suivante : $\dfrac{x-3}{2x-4} = \dfrac{x-2}{2x-5}$

- On détermine l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \left\{2; \dfrac{5}{2}\right\}$

- On effectue un produit en croix :

$$x \in D_f \qquad \begin{aligned} (x-3)(2x-5) &= (x-2)(2x-4) \\ 2x^2 - 5x - 6x + 15 &= 2x^2 - 4x - 4x + 8 \\ -5x - 6x + 4x + 4x &= -15 + 8 \\ -3x &= -7 \\ x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

or $\frac{7}{3} \in D_f$ donc $S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$

<u>Exemple 2</u> : Soit l'équation suivante : $\dfrac{-4}{x-4} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3}{x-3}$

- On détermine l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{0; 3; 4\}$
- On multiplie par le dénominateur commun ici $x(x-4)(x-3)$:

$$x \in D_f \qquad \begin{aligned} -4x(x-3) + (x-4)(x-3) &= -3x(x-4) \\ -4x^2 + 12x + x^2 - 3x - 4x + 12 &= -3x^2 + 12x \\ -4x^2 + x^2 + 3x^2 - 3x - 4x &= -12 \\ -7x &= -12 \\ x &= \frac{12}{7} \end{aligned}$$

or $\frac{12}{7} \in D_f$ donc $S = \left\{\frac{12}{7}\right\}$

2.2 Par une factorisation

Lorsque l'équation n'est pas du premier degré, on "passe" tous les termes à gauche. On cherche ensuite à factoriser si cela est possible. Il existe deux façons pour factoriser : soit un facteur commun soit une identité remarquable.

2.2.1 Par un facteur commun

<u>Règle 1</u> :

Une factorisation par un facteur commun peut se résumer par l'égalité suivante :

$$ab + ac = a(b + c)$$

<u>Exemple</u> : Soit l'équation suivante : $(x-1)(2x+3) = (x-1)(x-6)$

On pourrait être tenté de simplifier par $x-1$ car il apparaît de chaque côté de l'équation. Cependant cette quantité pourrait être nulle et l'on serait dans le cas d'une division par "zéro" ce qui est impossible. Il faut donc annuler le second membre puis factoriser.

$$\begin{aligned}(x-1)(2x+3) &= (x-1)(x-6)\\ (x-1)(2x+3)-(x-1)(x-6) &= 0\\ (x-1)\left[(2x+3)-(x-6)\right] &= 0\\ (x-1)(2x+3-x+6) &= 0\\ (x-1)(x+9) &= 0\end{aligned}$$

un produit est nul lorsque l'un au moins des facteur est nul

$$\begin{aligned}x-1=0 \quad &\text{ou}\quad x+9=0\\ x=1 \quad &\text{ou}\quad x=-9\end{aligned}$$

$$S = \{-9; 1\}$$

2.2.2 Par une identité remarquable

Règle 2 :

Il y a trois identités remarquables du second degré qui permettent de factoriser :

$$\begin{aligned}a^2-b^2 &= (a-b)(a+b) && \text{différence de deux carrés}\\ a^2+2ab+b^2 &= (a+b)^2 && \text{carré parfait}\\ a^2-2ab+b^2 &= (a-b)^2 && \text{carré parfait}\end{aligned}$$

Exemple : Soit l'équation suivante : $(5x+2)^2 = (x+1)^2$

On annule le second le membre puis on factorise par une différence de deux carrés.

$$\begin{aligned}(5x+2)^2 &= (x+1)^2\\ (5x+2)^2-(x+1)^2 &= 0\\ (5x+2-x-1)(5x+2+x+1) &= 0\\ (4x+1)(6x+3) &= 0\\ 3(4x+1)(2x+1) &= 0\end{aligned}$$

un produit est nul lorsque l'un au moins des facteur est nul

$$\begin{aligned}4x+1=0 \quad &\text{ou}\quad 2x+1=0\\ 4x=-1 \quad &\text{ou}\quad 2x=-1\\ x=-\frac{1}{4} \quad &\text{ou}\quad x=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right\}$$

2.3 Par une égalité de deux carrés

Règle 3 :

Deux nombres au carré sont égaux si et seulement si ces nombres sont égaux ou opposés. C'est à dire que :

$$a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$$

Exemple : reprenons l'exemple dernier : $(5x+2)^2 = (x+1)^2$

deux carrés égaux donc :

$$\begin{array}{rcr} 5x+2 = x+1 & \text{ou} & 5x+2 = -x-1 \\ 5x - x = -2+1 & \text{ou} & 5x + x = -2-1 \\ 4x = -1 & \text{ou} & 6x = -3 \\ x = -\dfrac{1}{4} & \text{ou} & x = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{4} ; -\frac{1}{2} \right\}$$

2.4 En élevant au carré

Pour une équation irrationnelle, la solution consiste à élever au carré.

2.4.1 Équation du type $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$.

Pour que cette équation soit définie, il faut que :

$$A(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad B(x) \geqslant 0$$

Cela nous donne donc l'ensemble de définition D_f de l'équation.

Pour résoudre, on élève au carré, en ayant soin de dire que $x \in D_f$

Exemple : Soit l'équation suivante :

$$\sqrt{4x-1} = \sqrt{3-x}$$

On détermine l'ensemble de définition D_f

$$\begin{cases} 4x-1 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{4} \\ x \leqslant 3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad D_f = \left[\frac{1}{4} ; 3 \right]$$

On élève au carré :

$$\begin{array}{ccr} x \in D_f & \text{et} & 4x-1 = 3-x \\ & & 5x = 4 \\ & & x = \dfrac{4}{5} \end{array}$$

$$\frac{4}{5} \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \left\{ \frac{4}{5} \right\}$$

2.4.2 Équation du type $\sqrt{A(x)} = B(x)$.

Pour que cette équation soit définie, il faut que :

$$A(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad B(x) \geqslant 0$$

En fait la première condition est superflue car si l'on élève au carré l'équation, on obtient :

$$A(x) = [B(x)]^2$$

Si l'égalité est vérifiée alors $A(x)$ est nécessairement positif ou nul.

Conclusion : l'équation est équivalente à : $B(x) \geqslant 0$ et $A(x) = [B(x)]^2$

Exemple : Soit l'équation suivante :

$$\sqrt{x^2 - 1} = x + 2$$

On détermine l'ensemble de définition :

$$x + 2 \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad x \geqslant -2 \quad \text{soit} \quad D_f = [-2; +\infty[$$

On élève au carré

$$x \in D_f \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x^2 - 1 &= (x+2)^2 \\ x^2 - 1 &= x^2 + 4x + 4 \\ -4x &= 5 \\ x &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$-\frac{5}{4} \in D_f \qquad \text{donc} \qquad S = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$$

3 Inéquation du premier degré

Théorème 2 :

Toute inéquation du premier degré peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$ax \leqslant b \quad , \quad ax < b \quad , \quad ax \geqslant b \quad , \quad ax > b$$

Si $a \neq 0$ on obtient soit une section finissante, soit une section commençante.

Si $a = 0$ l'inéquation est soit toujours vraie, soit impossible

Attention :
Lorsque l'on multiplie ou divise une inéquation par un nombre négatif, il faut changer la relation d'ordre

Exemple : Résoudre l'inéquation suivante : $2(x-1)-3(x+1) > 4(3x+2)$

$$\begin{aligned} 2(x-1)-3(x+1) &> 4(3x+2) \\ 2x-2-3x-3 &> 12x+8 \\ 2x-3x-12x &> 2+3+8 \\ -13x &> 13 \end{aligned}$$

on divise par -13, on change donc la relation d'ordre, ce qui donne :

$$\begin{aligned} x &< \frac{13}{-13} \\ x &< -1 \end{aligned}$$

on conclut par l'intervalle solution

$$S =]-\infty\ ;\ -1[$$

4 Inéquation se ramenant au premier degré

Pour résoudre une inéquation qui se ramène au 1er degré par une factorisation ou par le quotient de facteurs du 1er degré, on remplit un tableau de signe afin de pouvoir conclure sur l'ensemble solution.

Règle 4 :

Le signe du binome $ax+b$, suivant les valeur de x, peut se résumer suivant le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

4.1 Par une factorisation

Exemple : Soit l'inéquation suivante : $(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$

L'inéquation n'est pas de 1er degré et le second terme de l'inéquation n'est pas nul. Il faut pouvoir revenir à une forme factorisée avec un second terme nul.

1. On annule le second terme. L'inéquation devient alors :

$$(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-3) < 0$$

2. On factorise :

$$(x-5)\left[(x-2)-(2x-3)\right] < 0$$
$$(x-5)(x-2-2x+3) < 0$$
$$(x-5)(-x+1) < 0$$

On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières.

3. Valeurs frontières :

$x-5=0$ donc $x=5$

$-x+1=0$ donc $-x=-1$ d'où $x=1$

4. On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-5)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Conclusion : pour que le produit soit strictement négatif, nous avons deux possibilités

$$x<1 \quad \text{ou} \quad x>5$$

La solution est donc :

$$S =]-\infty\ ;\ 1\ [\ \cup\ ]\ 5\ ;\ +\infty\ [$$

4.2 Inéquation rationnelle

Exemple : Soit l'inéquation suivante : $\dfrac{4}{x+1} \leqslant 3$

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, comme le second terme n'est pas nul, il faut donc l'annuler. On réduit ensuite au même dénominateur de façon à n'avoir qu'une seule fraction.

1. Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
2. On annule le second terme et on réduit au même dénominateur :

$$\frac{4}{x+1} - 3 \leqslant 0$$
$$\frac{4-3x-3}{x+1} \leqslant 0$$
$$\frac{-3x+1}{x+1} \leqslant 0$$

3. On cherche les valeurs frontières :

$$-3x+1=0 \quad \text{donc} \quad -3x=-1 \quad \text{d'où} \quad x=\frac{1}{3}$$
$$x+1=0 \quad \text{donc} \quad x=-1$$

4. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	|	$-$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$-$	|	$+$	
$\dfrac{-3x+1}{x+1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

5. Conclusion : pour que le quotient soit négatif ou nul, on a donc :

$$x \leqslant -1 \quad \text{ou} \quad x > \frac{1}{3}$$

La solution est donc :

$$S = \left]-\infty\ ;\ -1\right[\ \cup\ \left[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$$

5 Valeur absolue

5.1 Définition

Définition 1 :
On appelle valeur absolue d'un réel x le nombre noté $|x|$ tel que :

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$$
$$|x| = -x \quad \text{si} \quad x < 0$$

Exemple : $|-5| = 5 \qquad |21| = 21$

5.2 Equation du type $|a| = |b|$

Règle 5 :
L'égalité $|a| = |b|$ est équivalente à : $a = b$ ou $a = -b$

Application : Soit l'équation suivante : $|3x-4| = |2x+1|$

d'après notre règle, on a :

$$3x - 4 = 2x + 1 \quad \text{ou} \quad 3x - 4 = -2x - 1$$

$$x = 5 \qquad\qquad 5x = 3 \quad \text{soit} \quad x = \frac{3}{5}$$

$$S = \left\{\frac{3}{5}; 5\right\}$$

5.3 Autre type d'équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$|-3x + 4| + |-5 + x| = 10 \quad (E_1)$$

- On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue :

$$-3x + 4 = 0 \quad \text{soit} \quad x = \frac{4}{3}$$

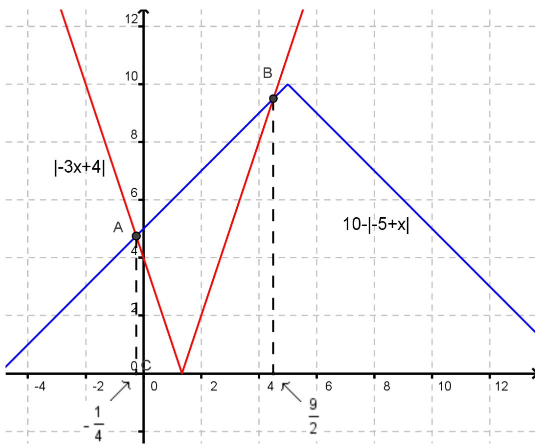
$$-5 + x = 0 \quad \text{soit} \quad x = 5$$

- On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$\lvert -3x + 4\rvert$		$-3x + 4$	0	$3x - 4$	11	$3x - 4$	
$\lvert -5 + x\rvert$		$5 - x$	$\frac{11}{3}$	$5 - x$	0	$-5 + x$	
(E_1)		$-4x+9 = 10$ $x = -\frac{1}{4}$ possible		$2x + 1 = 10$ $x = \frac{9}{2}$ possible		$4x - 9 = 10$ $x = \frac{19}{4}$ impossible	

on obtient alors deux solutions $S = \left\{-\frac{9}{4}; \frac{9}{2}\right\}$

- Résolution graphique :



5.4 Inéquation du type $|a| < b$

Règle 6 :

L'inéquation $|a| < b$, avec $b \geqslant 0$ est équivalente à l'intervalle défini par :

$$-b < a < b$$

Application : Soit l'inéquation suivante $|3x-4| < 2$.

L'inéquation est donc équivalente à :

$$\begin{aligned} -2 < 3x - 4 < 2 \\ -2 + 4 < 3x < 2 + 4 \\ 2 < 3x < 6 \\ \frac{2}{3} < x < 2 \end{aligned}$$

$$S = \left]\frac{2}{3}, 2\right[$$

5.5 Inéquation du type $|a| > b$

Règle 7 :

L'inéquation $|a| > b$, avec $b \geqslant 0$ est équivalente aux inéquations suivantes :

$$a > b \quad \text{ou} \quad a < -b$$

Application : Soit l'inéquation suivante : $|2x+1| \geqslant 3$

D'après notre règle, on a :

$$\begin{aligned} 2x + 1 &\geqslant 3 \\ 2x &\geqslant 2 \\ x &\geqslant 1 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 2x + 1 &\leqslant -3 \\ 2x &\leqslant -4 \\ x &\leqslant -2 \end{aligned}$$

$$S =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$$

5.6 Autre type d'inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$|2x-1| \leqslant |x+2| \qquad (E_2)$$

- On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue.

$$2x - 1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad x = \frac{1}{2}$$

$$x + 2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad x = -2$$

➻ On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$		$-2x+1$	5	$-2x+1$	0	$2x-1$	
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$	0	$x+2$	$\frac{5}{2}$	$x+2$	
(E_2)		$-2x+1 \leqslant -x-2$ $x \geqslant 3$ impossible $S_1 = \varnothing$		$-2x+1 \leqslant x+2$ $x \geqslant -\frac{1}{3}$ $S_2 = \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$		$2x-1 \leqslant x+2$ $x \leqslant 3$ $S_3 = \left[\frac{1}{2};3\right]$	

on obtient alors la solution $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[-\frac{1}{3};3\right]$

➻ Résolution graphique :