Le second degré

Table des matières

1 La forme canonique du trinôme

1.1 Le trimôme du second degré

Définition 1 :
On appelle trinôme du second degré ou simplement trinôme, le polynôme $P(x)$, à coefficients réels, de la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Exemples : Les trois polynômes suivants sont des trinômes

$$P_1(x) = x^2 + 2x - 8$$
$$P_2(x) = 2x^2 + 3x - 14$$
$$P_3(x) = -x^2 + 4x - 5$$

1.2 Quelques exemples de formes canoniques

La forme canonique d'un trinôme est une forme à partir de laquelle on peut savoir si le trinôme peut se factoriser ou non. Cette forme est obtenue à partir d'une "astuce" qui consiste à rajouter un terme puis à l'oter de façon à obtenir le début d'un carré parfait.

Exemple 1 : Soit $P_1(x) = x^2 + 2x - 8$

Les deux premiers termes sont $x^2 + 2x$ qui est le début de $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. On ajoute 1 puis on le soustrait, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 8 \\ &= (x+1)^2 - 9 \qquad \text{forme canonique de } P_1(x) \end{aligned}$$

on peut, à partir de cette forme, factoriser. Cela donne :

$$\begin{aligned} &= (x+1)^2 - 3^2 \\ &= (x+1-3)(x+1+3) \\ &= (x-2)(x+4) \end{aligned}$$

Exemple 2 : Soit $P_2(x) = 2x^2 + 3x - 14$

On factorise par le coefficient devant x^2, c'est à dire ici 2.

$$P_2(x) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 7\right)$$

on considère que $\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right)$ est le début de $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$.
Cela donne :

$$\begin{aligned}
&= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - 7\right) \\
&= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 7\right] \\
&= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right] \qquad \text{forme canonique de } P_2(x)
\end{aligned}$$

on peut, à partir de cette forme, factoriser. Cela donne :

$$\begin{aligned}
&= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{11}{4}\right)^2\right] \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4} - \frac{11}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} + \frac{11}{4}\right) \\
&= 2\,(x - 2)\left(x + \frac{7}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exemple 3 : Soit $P_3(x) = -x^2 + 4x - 5$

On factorise par le coefficient devant x^2, c'est à dire ici -1.

$$P_1(x) = -\left(x^2 - 4x + 5\right)$$

on considère que $\left(x^2 - 4x\right)$ est le début de $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
&= -\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + 5\right) \\
&= -\left[(x-2)^2 - 4 + 5\right] \\
&= -\left[(x-2)^2 + 1\right] \qquad \text{forme canonique de } P_2(x)
\end{aligned}$$

on ne peut factoriser cette forme car somme de deux carrés

1.3 Forme canonique du trinôme

Soit un trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$

On factorise par a, cela donne :

$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

on considère que $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.
Cela donne :

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Théorème 1 :
La forme canonique d'un trinôme du second degré est de la forme :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Attention : Dans un cas concrêt, on n'utilise pas cette formule un peu difficile à mémoriser, mais on retient l'astuce qui consiste à ajouter puis soustraire un terme comme nous l'avons vu dans les exemples précédents.

2 Racines du trinôme

2.1 Définition

Définition 2 :
Les racines d'un trinômes sont les solutions de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Définition 3 :
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ devient donc :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

Comme le nombre de solutions de cette équation dépend du signe de Δ, cette quantité est appelé discriminant.

2.2 Le discriminant est positif

Comme le discriminant Δ est positif, la forme canonique se factorise en :

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

On obtient alors deux solution :

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

On obtient alors :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 + 3x - 14 = 0$

On calcule Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 3^2 - 4 \times 2 \times (-14)\\ &= 9 + 112\\ &= 121\\ &= 11^2\end{aligned}$$

Comme Δ est positif, il existe deux solutions distinctes x' et x'' :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 11}{4} = 2$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 11}{4} = -\frac{7}{2}$$

On conclut par :

$$S = \left\{-\frac{7}{2} ; 2\right\}$$

2.3 Le discriminant est nul

Comme le discriminant Δ est nul, la forme canonique correspond à un carré parfait. Elle se factorise en :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

On obtient alors qu'une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^2 - 18x + 27 = 0$

On calcule Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 18^2 - 4 \times 3 \times 27 \\ &= 324 - 324 \\ &= 0\end{aligned}$$

Comme Δ est nul, il n'existe qu'une seule solution x_0 :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{6} = 3$$

On conclut par :

$$S = \{3\}$$

2.4 Le discriminant est négatif

Comme le discriminant Δ est négatif la forme canonique ne se factorise pas. Il n'y a donc aucune solution à l'équation du second degré.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $-x^2 + 4x - 5 = 0$

On calcule Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \times (-1) \times (-5) \\ &= 16 - 20 \\ &= -4\end{aligned}$$

Comme Δ est négatif, il n'y a pas de solution. On conclut par :

$$S = \varnothing$$

2.5 Conclusion

Théorème 2 :

Le nombre de racines du trinôme du second degré dépend du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$ il existe deux racines :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$ il n'existe qu'une racine (appelée racine double) - :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Si $\Delta < 0$ il n'existe aucune racine

3 Factorisation du trinôme, somme et produit des racines

3.1 Factorisation du trinôme

Si le discriminant est positif. Nous avons vu que le trinôme se factorise en :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

En remplaçant par les racines x' et x'', nous avons alors :

$$a(x-x')(x-x'')$$

De même si le discriminant est nul. Nous avons vu que le trinôme se factorise en :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

En remplaçant par la racine $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, nous avons alors :

$$a(x-x_0)^2$$

Exemples :

1. Factoriser le trinôme suivant : $P(x)=2x^2+3x-14$

   Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les racines de ce trinôme sont : $-\dfrac{7}{2}$ et 2 , donc :

   $$P(x)=2\left(x+\frac{7}{2}\right)(x-2)$$

   Nous retrouvons le résultat que nous avons démontré avec la forme canonique.

2. Factoriser le trinôme suivant : $Q(x)=3x^2-18x+27$

   Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la racine de ce trinôme est 3 , donc :

   $$Q(x)=3(x-3)^2$$

Théorème 3 :

Lorsque le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ admet deux racines x' et x'', il peut se factoriser sous la forme :

$$P(x)=a(x-x')(x-x'')$$

Lorsque le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ admet une racine x_0 , il peut se factoriser sous la forme :

$$P(x)=a(x-x_0)^2$$

Lorsque le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ n'admet pas de racine, il ne peut se factoriser

3.2 Somme et produit des racines

Soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nous nous plaçons dans le cas où le discrimenant est positif. Il y a donc deux racines x' et x''. Le trinôme peut alors se factoriser en :

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

Developpons :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 - x''x - x'x + x'x'') \\ &= a\left[x^2 - (x' + x'')\,x + x'x''\right] \\ &= ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x'' \end{aligned}$$

On pose $S = x' + x''$ et $P = x'x''$, on a alors

$$f(x) = ax^2 - aS\,x + aP$$

En identifiant à : $f(x) = ax^2 + bx + c$, on obtient alors :

$$-aS = b \quad \text{donc} \quad S = -\frac{b}{a}$$

$$aP = c \quad \text{donc} \quad P = \frac{c}{a}$$

Exemple : Soit le trinôme $f(x) = 2x^2 + 3x - 14$

Nous savons que ce trinôme admet deux solutions $-\frac{7}{2}$ et 2, d'après notre résultat :

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \quad \text{ce qui se vérifie} \quad -\frac{7}{2} + 2 = -\frac{-7+4}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{14}{2} = -7 \quad \text{ce qui se vérifie} \quad -\frac{7}{2} \times 2 = -7$$

Théorème 4 :

Si un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines, alors la somme et le produit des racines sont égales à :

$$S = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{c}{a}$$

3.3 Application

Parfois, certaines équations admettent des solutions très simples que l'on appellent "racines évidentes". Lorsque l'on connaît une telle solution, le produit des racines permet alors de trouver la seconde.

Exemples

1. Résoudre l'équation : $2x^2 - 5x + 3 = 0$

   La somme des coefficients est nulle, donc

   $x' = 1$ est racine évidente car $2(1)^2 - 5(1) + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$

   $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$ donc $x'' = \dfrac{P}{x'} = \dfrac{3}{2}$

$$S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$$

2. Résoudre l'équation : $5x^2 + 2x - 3 = 0$

   La somme des coefficients extrèmes $a + c = 5 - 3 = 2$ egale celui du milieu $b = 2$, alors :

   $x' = -1$ est racine évidente car $5(-1)^2 + 2(-1) - 3 = 5 + 2 - 3 = 0$

   $P = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{3}{5}$ donc $x'' = \dfrac{P}{x'} = \dfrac{3}{5}$

$$S = \left\{-1; \frac{3}{5}\right\}$$

4 Signe du trinôme et inéquation du second degré

4.1 Le discriminant est positif

Si le discriminant est positif, le trinôme se factorise en :

$$P(x) = a(x - x')(x - x'')$$

En supposant que $x' \geqslant x''$, faisons un tableau de signes :

x	$-\infty$		x''		x'		$+\infty$
$x - x'$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - x''$		$-$	0	$+$		$-$	
$(x - x')(x - x'')$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x')(x-x'')$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

<u>Conclusion</u> : Le signe du trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.

<u>Exemple</u> : Signe de $-3x^2 + 7x + 6$

Il n'y pas de racine immédiate, calculons alors de discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= 7^2 - 4(-3)(6)\\ &= 49 + 72\\ &= 121\\ &= 11^2\end{aligned}$$

Comme le discriminant est positif, le trinôme admet deux racines :

$$x' = \frac{-7+11}{-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-7-11}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

Comme le coefficient devant x^2 est négatif (-3), le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur.

Nous avons alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$-3x^2+7x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4.2 Le discriminant est nul ou négatif

Si le discriminant est nul, le trinôme se factorise en :

$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

Comme $(x - x_0)^2$ est un carré, il est soit nul soit positif. Donc le trinôme est soit nul soit du signe de a.

On a alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$a(x-x_0)^2$		Signe de a	0	Signe de a	

Si le discriminant est négatif, il n'a donc pas de racine. Il possède donc un signe constant. On montre alors qu'il est du signe de a.

4.3 Conclusion

Théorème 5 :

Le signe du trinôme dépend du discriminant :

- Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme est soit nul, soit du signe de a.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a.

5 Représentation du trinôme

Théorème 6 :
La représentation du trinôme est une parabole dont les caractéristiques dépendent du signe du coefficient a et du signe du discrimimant.
Les coordonnées du sommet de la parabole sont données par la forme canonique : $S\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Remarque : La forme canonique a pour expression :

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

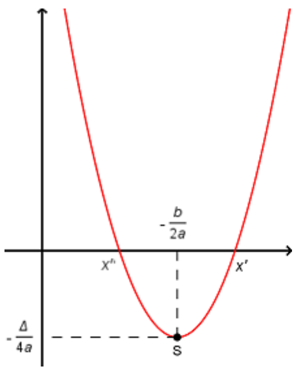
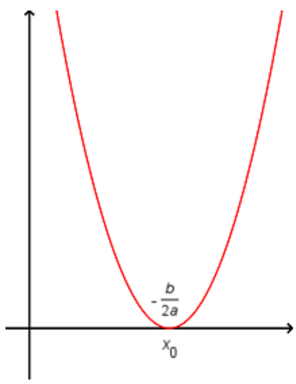
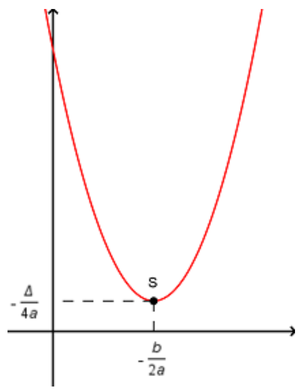
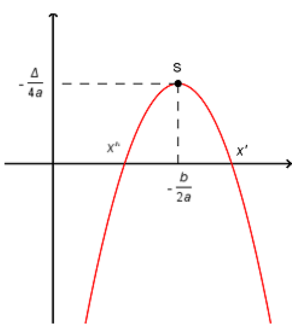
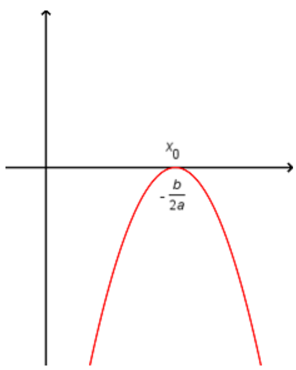
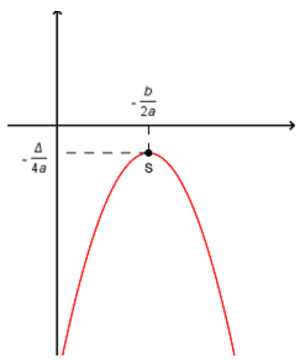
Pour trouver l'extremum du trinôme, il suffit de rendre minimum la quantité :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Ceci est obtenu pour :

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{on trouve alors} \quad y = -\frac{\Delta}{4a}$$

On peut résumer ces résulats par le tableau suivant :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Si $a > 0$ la parabole est tournée vers le haut.
Si $a < 0$ la parabole est tournée vers le bas.
Si $\Delta > 0$ la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses.
Si $\Delta = 0$ la parbole est tangente à l'axe des abscisses.
Si $\Delta < 0$ la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

6 Équation paramètrique

Définition 4 :

On appelle équation paramétrique de paramètre m, une équation d'inconnue x dont se propose de déterminer le nombre de solutions, leur signe, ... suivant les valeurs du paramètre m.

Exemple : Déterminer le nombre de solutions de l'équation paramètrique suivante selon les valeur de m, puis visualiser les résultats obtenus. Montrer que toutes les courbes passent par un point que l'on déterminera.

$$(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0 \qquad (E_m)$$

Pour que cette équation soit du second degré, il faut que le coefficient devant x^2 soit non nul. Sinon l'équation est du premier degré.

1. Si $m = 1$, alors l'équation est du premier degré.

$$-2x + 4 = 0 \quad \text{soit} \quad x = 2$$

2. Si $m \neq 0$, l'équation est du second degré. On détermine alors le discriminant en fonction de m.

$$\begin{aligned}\Delta &= 4m^2 - 4(m-1)(m+3)\\ &= 4(m^2 - m^2 - 3m + m + 3)\\ &= 4(-2m+3)\end{aligned}$$

Le nombre de solutions est fonction du signe de Δ. Il faut donc déterminer le signe du discriminant.

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2m + 3 = 0 \quad \text{soit} \quad m = \frac{3}{2}$$

On fait alors un tableau de signe, en indiquant le nombre de solutions

m	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Δ	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$
Nombre de solutions	2 solutions x' et x''	1er degré 1 sol	2 solutions x' et x''	1 sol double x_0	pas de solution

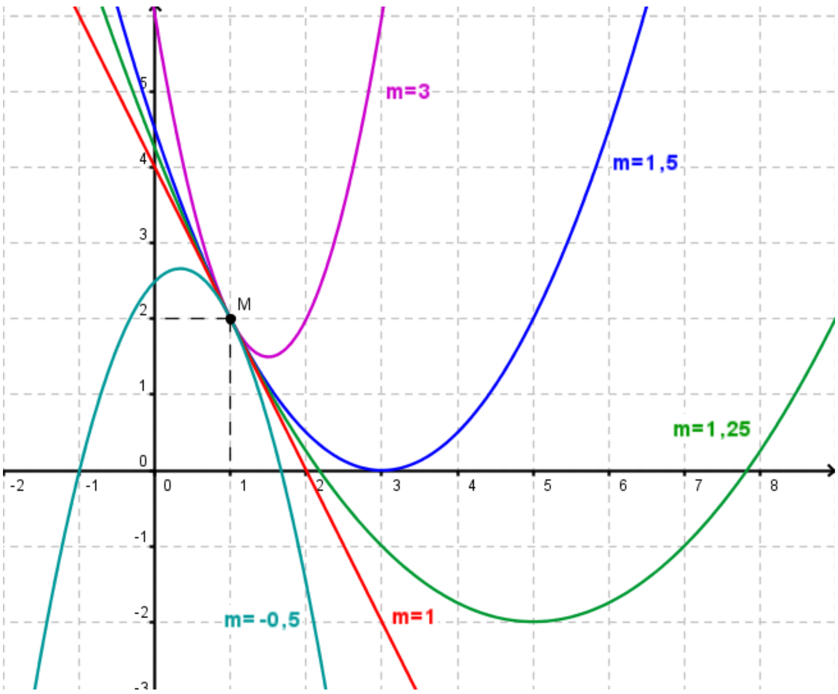
3. Pour que cette équation admette deux solutions, il faut que :

$$m \in \left]-\infty ; 1\right[\cup \left]1 ; \frac{3}{2}\right[$$

Pour visualiser les résultats obtenus, on trace des courbes représentants la famille des trinômes suivants :

$$P_m(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 3$$

On prend par exemples les valeurs de m suivantes : $m = -0,5$, $m = 1$, $m = 1,25$, $m = 1,5$ et $m = 3$.
On obtient alors :



On observe alors que toutes les courbes semblent passer par le point $M(1;2)$. Montrons alors que cette conjecture est vraie.
Pour que cette conjecture soit vraie, il faut que :

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \text{on a} \quad P_m(1) = 2$$

Calculons alors $P_m(1)$:

$$P_m(1) = (m-1) \times 1^2 - 2m \times 1 + m + 3 = m - 1 - 2m + m + 3 = 2$$

On a donc bien $P_m(1) = 2$ quelques soient les valeurs de m. Toutes les courbes passent par le le point $M(1;2)$.

7 Équation ou inéquation se ramenant au second degré

7.1 Équation rationnelle

Soit à résoudre l'équation :

$$\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-5} = \frac{9}{4}$$

On détermine d'abord l'ensemble de définition de l'équation :

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$$

On résout alors l'équation, en multipliant l'équation par le dénominateur commun $4(x+2)(2x-5)$

$$\begin{aligned} x \in D_f \qquad 4(2x-5) - 8(x+2) &= 9(x+2)(2x-5) \\ 8x - 20 - 8x - 16 &= 18x^2 - 45x + 36x - 90 \\ -18x^2 + 9x + 54 &= 0 \end{aligned}$$

on divise par 9, on obtient alors :

$$-2x^2 + x + 6 = 0$$

On a $x' = 2$ racine évidante car $-2 \times 2^2 + 2 + 6 = 0$

Le produit des racines $P = \dfrac{6}{-2} = -3$ donc on a $x'' = \dfrac{P}{x'} = -\dfrac{3}{2}$

Comme $-2 \in D_f$ et $-\dfrac{3}{2} \in D_f$ on a alors :

$$S = \left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$$

7.2 Inéquation rationnelle

Soit à résoudre l'inéquation :

$$\frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + x - 2} \geqslant 0$$

On détermine d'abord l'ensemble de définition de l'inéquation :

Il faut déterminer les racines de $x^2 + x - 2 = 0$

$x' = 1$ est racine envidente car $1^2 + 1 - 2 = 0$

Le produit des racines $P = -2$, donc $x'' = -2$

On conclut que l'ensemble de définition est :

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

Racines de $2x^2 + 5x + 3 = 0$

$x' = -1$ est racine évidente car $2 \times (-1)^2 - 5 + 3 = 0$

Le produit des racines $P = \dfrac{3}{2}$, donc $x'' = -\dfrac{3}{2}$

On remplit un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

La solution est donc :

$$S =]-\infty;-2[\; \cup \; \left[-\frac{3}{2};-1\right] \; \cup \;]1;+\infty[$$

7.3 Équation bicarrée

Définition 5 :
On appelle une équation bicarrée, un équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Pour résoudre ce type d'équation, on effectue le changement de variable suivant :

$$X = x^2 \quad \text{avec} \quad X \geqslant 0$$

L'équation devient ainsi :

$$aX^2 + bX + c = 0$$

On résout en X puis on revient à x en résolvant $x^2 = X$

Exemple : Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

On pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$, l'équation devient :

$$X^2 - 5X - 36 = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = 25 + 4 \times 36 = 169 = 13^2$

Comme $\Delta > 0$, on a deux racines :

$$X' = \frac{5+13}{2} = 9 \quad \text{et} \quad X'' = \frac{5-13}{2} = -4$$

On ne retient que X', car c'est la seule racine positive.

On revient à x :

$$x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

L'ensemble solution est donc :

$$S\ \{-3; 3\}$$

7.4 Équation irrationnelle

Résoudre l'équation suivante :

$$\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$$

On détermine l'ensemble de définition de l'équation, on a :

$$\begin{cases} x+12 \geqslant 0 \\ x^2+2x-8 \geqslant 0 \end{cases}$$

La première inéquation ne pose pas de problème. Il faut déterminer les racines de la deuxième : $x^2+2x-8 \geqslant 0$

$x' = 2$ racine évidente car $2^2+2\times 2-8=0$

le produit des racine $P=-8$, donc $x''=-4$

Comme on veut que la quantité soit positive et que $a=1$, on prend eà l'estèrieur des racines $]-\infty;-4] \cup [2;+\infty[$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} x \geqslant -12 \\ x \in]-\infty;-4] \cup [2;+\infty[\end{cases}$$

L'ensemble de définition est donc :

$$D_f = [-12;-4] \cup [2;+\infty[$$

On résout alors l'équation :

$$\begin{aligned} x \in D_f \quad & \text{on élève au carré} \\ x+12 &= x^2+2x-8 \\ -x^2-x+20 &= 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant : $\Delta = 1+80 = 81 = 9^2$

Comme $\Delta > 0$, on a deux racines :

$$x' = \frac{1+9}{-2} = -5 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{1-9}{-2} = 4$$

Comme -5 et 4 appartiennent à l'ensemble de définition, on a :

$$S = \{-5;4\}$$

7.5 Somme et produit de deux inconnues

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$$

Ce système est symétrique, car on peut intervertir x et y sans que cela ne change le système. Cela veut dire que si le couple (a, b) est solution alors le couple (b, a) l'est également.

Ce système revient à résoudre une équation du second degré où x et y seront les solutions de cette équation. S représente la somme des racines et P leur produit. On doit donc résoudre :

$$X^2 - SX + P = 0$$

Application : Soit à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases}$$

x et y sont donc les racines de :

$$X^2 - 18X + 65 = 0$$

On calule de discriminant $\Delta = 18^2 - 4 \times 65 = 64 = 8^2$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines :

$$X' = \frac{18+8}{2} = 13 \quad \text{et} \quad X'' = \frac{18-8}{2} = 5$$

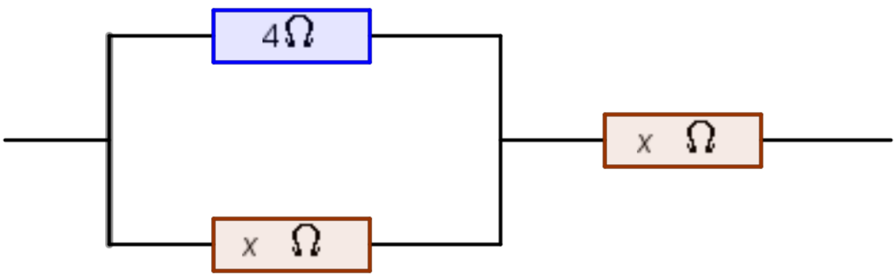
Les solutions du système sont donc :

$$S = \{(13, 5); (5, 13)\}$$

8 Quelques problèmes résolus par une équation du second degré

8.1 Problème de résistence équivalente

Dans un circuit électrique, des résistances ont été montées comme l'indique la figure ci-dessous. Déterminer la valeur de la résistance x pour que la résistance équivalente de l'ensemble soit de 6 Ω.



On rappelle que la résistance équivalente dans un circuit en série est la somme des résistance :

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

et que la résistance équivalente dans un circuit en parallèle est telle que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Le circuit est composé de deux parties, un partie en parallèle et l'autre en série. On a donc pour la résistance équivalente dans la partie en parallèle :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{x+4}{4x}$$

en prenant l'inverse

$$R_{eq} = \frac{4x}{x+4}$$

La résistance équivalente de l'ensemble est donc :

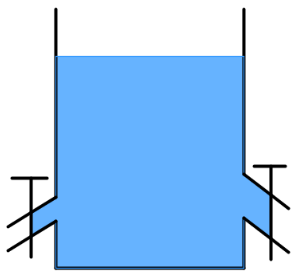
$$\frac{4x}{x+4} + x = 6$$

en multipliant par $(x+4)$, on a :

$$4x + x(x+4) = 6(x+4)$$
$$4x + x^2 + 4x = 6x + 24$$
$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

On calcul le discriminant : $\Delta = 4 + 4 \times 24 = 100 = 10^2$

8.2 Un problème de robinet



Un robinet B met 40 min de plus qu'un robinet A pour vider un réservoir. Lorsqu'on ouvre simultanément les deux robinets le réservoir est vidé en 48 min.

Quel temps faut-il à chacun pour vider le réservoir ?

La notion physique est le débit de vidange d'un réservoir. Le débit représente le volume écoulé par unité de temps :

$$d = \frac{V}{t}$$

On suppose que la vidange du réservoir se fait à débit constant. De plus le débit avec les deux robinets ouverts est égal à la somme des débits du robinet A et du robinet B.

On pose :
t_A : temps de vidange en minutes avec le robinet A
t_B : temps de vidange en minutes avec le robinet B
t_T : temps de vidange en minutes avec les robinets A et B. On a donc $t_T = 48$
V : volume du réservoir
On a donc :

$$\frac{V}{t_T} = \frac{V}{t_A} + \frac{V}{t_B} \qquad (1)$$

Comme le robinet B a un temps de vidange de 40 min supérieur à celui du robinet A, on a :

$$t_B = t_A + 40 \qquad (2)$$

En remplaçant l'égalité (2) dans l'égalité (1), on a :

$$\frac{V}{48} = \frac{V}{t_A} + \frac{V}{t_A + 40}$$

En divisant par V et en multipliant par $48(t_A)(t_A + 40)$, on a :

$$\begin{aligned} t_A(t_A + 40) &= 48(t_A + 40) + 48t_A \\ t_A^2 + 40t_A &= 48t_A + 1920 + 48t_A \\ t_A^2 - 56t_A - 1920 &= 0 \end{aligned}$$

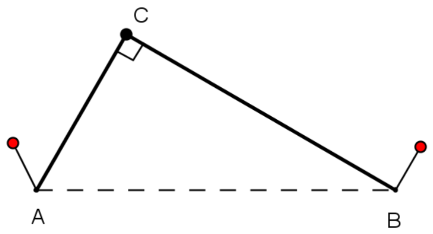
On calcule le discriminant $\Delta = 56^2 + 4 \times 1920 = 10\ 816 = 104^2$

On prend la racine positive de l'équation :

$$t_A = \frac{56 + 104}{2} = 80 \qquad \text{donc} \qquad t_B = 80 + 40 = 120$$

Conclusion : le temps de vidange du robinet A est de 80 min soit 1h20 et celui du robinet B est de 120 min soit 2h.

8.3 Une histoire de ficelle



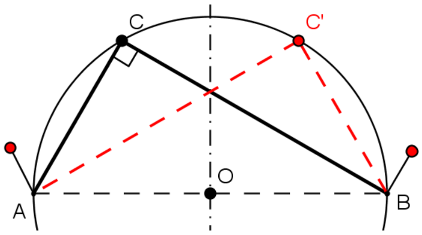
Une ficelle longue de 89 cm est fixée à ses extrémités par deux clous A et B distants de 65 cm.

1. Est-il possible de tendre la ficelle de manière à ce que le triangle ABC soit rectangle en C ?
2. Quelle doit être la longueur maximale de la ficelle pour que le problème soit possible ?

---

1. Pour que le triangle ABC soit rectangle en C, il faut que le point C soit sur le cercle de diamètre [AB].

Du fait de la symétrie du problème, si le point C existe, il en existe un deuxième C′ symétrique du premier par rapport à l'axe passant par le milieu de [AB] et perpendiculaire à (AB).



On pose $x = AC$, comme la longueur de ficelle est de 89 cm on a alors $BC = 89 - x$

Comme $AB = 65$, d'après le théorème de Pythagore, on a :

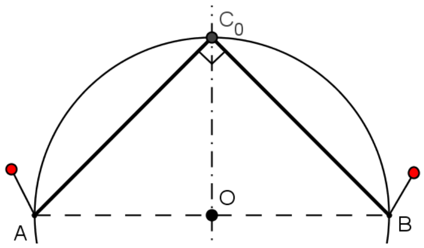
$$\begin{aligned} x^2 + (89 - x)^2 &= 65^2 \\ x^2 + 89^2 - 89 \times 2x + x^2 &= 65^2 \\ 2x^2 - 89 \times 2x + 89^2 - 65^2 &= 0 \\ 2x^2 - 89 \times 2x + (89 - 65)(89 + 65) &= 0 \\ 2x^2 - 89 \times 2x + 24 \times 154 &= 0 \\ x^2 - 89x + 12 \times 154 &= 0 \\ x^2 - 89x + 1848 &= 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant $\Delta = 89^2 - 4 \times 1848 = 529 = 23^2$

On obtient les deux solutions correspondant aux point C et C′ :

$$x' = \frac{89 + 23}{2} = 56 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{89 - 23}{2} = 33$$

2. La situation limite correspond à la configuration où les points C et C′ sont confondus.
On appelle l la longueur maximale de la ficelle.



Le triangle ACB est alors un triangle rectangle isocèle.

On a alors $AB^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$

On en déduit alors $l = 65\sqrt{2}$

Vérifions ce résultat par le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} x^2 + (l-x)^2 &= 65^2 \\ x^2 + l^2 + 2lx + x^2 - 65^2 &= 0 \\ 2x^2 + 2lx + l^2 - 65^2 &= 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4l^2 - 8(l^2 - 65^2) \\ &= 4l^2 - 8l^2 + 8 \times 65^2 \\ &= -4l^2 + 8 \times 65^2 \\ &= 4(-l^2 + 2 \times 65^2) \end{aligned}$$

Pour que ce système admette des solutions, on doit avoir $\Delta \geqslant 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} -l^2 + 2 \times 65^2 &\geqslant 0 \\ l^2 - 2 \times 65^2 &\leqslant 0 \\ (l - 65\sqrt{2})(l + 65\sqrt{2}) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Les racines sont donc $l' = 65\sqrt{2}$ et $l'' = -65\sqrt{2}$

Comme le coefficient devant l^2 est positif, on en déduit que l'on doit prendre entre les racines. Comme $l > 65$, on en déduit que le problème admet une solution si :

$$65 < l \leqslant 65\sqrt{2}$$

La valeur limite de l est donc $65\sqrt{2} \simeq 91,92$

Fin