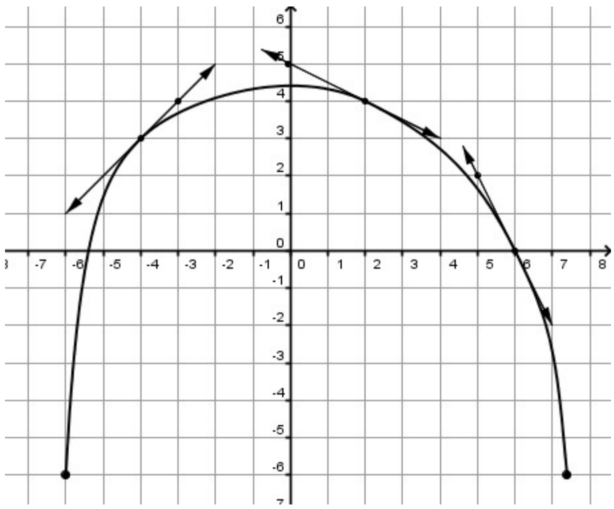
La fonction dérivée
Exercices

Exercice 1 :

Nombre dérivé

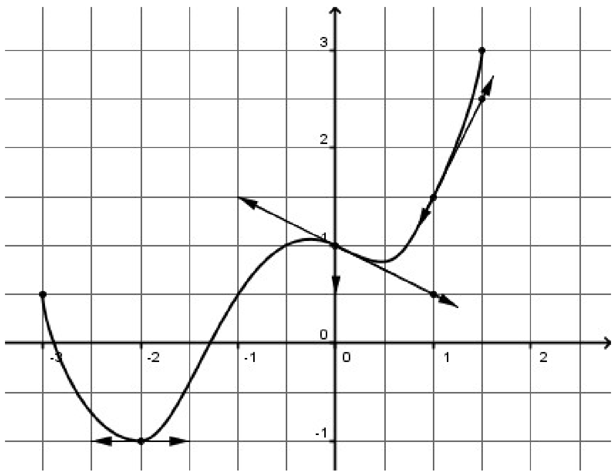
1) La courbe représentative f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. Lire, en vous servant du quadrillage les nombres suivants :

$$f(-4) \quad ; \quad f'(-4) \quad ; \quad f(2) \quad ; \quad f'(2) \quad ; \quad f(6) \quad \text{et} \quad f'(6)$$



2) La courbe représentative g est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. Lire, en vous servant du quadrillage les nombres suivants :

$$g(-2) \quad ; \quad g'(-2) \quad ; \quad g(0) \quad ; \quad g'(0) \quad ; \quad g(1) \quad \text{et} \quad g'(1)$$



Exercice II :

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 9x - 5$
2) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \sqrt{3}x + 1$
3) $f(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2}$
4) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$
5) $f(x) = \dfrac{x^3 + 12x - 1}{4}$
6) $f(x) = (7x-2)^2$
7) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$
8) $f(x) = x + \sin x$
9) $f(x) = x \sin x$
10) $f(x) = -\dfrac{4}{x^3}$
11) $f(x) = \dfrac{2}{3x-5}$
12) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$
13) $f(x) = \dfrac{4x+7}{x^2}$
14) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$
15) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
16) $f(x) = \dfrac{2}{5x} - \dfrac{3x}{4}$
17) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$
18) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{2x - 5}$
19) $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{4-x}$
20) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin x$
21) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$
22) $f(x) = \sqrt{x-4}$
23) $f(x) = (-2x+3)^4$

Exercice III :

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-5}{x+1}$$

1) Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f et g. Que remarque t-on ?
2) Calculer $f(x) - g(x)$. Justifier alors la remarque de la question 1)

Exercice IV :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} \quad \text{et } \mathscr{C}_f \text{ est sa courbe représentative}$$

1) Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$.
2) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par $O(0,0)$?

Exercice V :

Tangente

Pour les fonctions suivantes déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

1) $f(x) = -x^2 + 2x - 8\,; \quad a = -2$
2) $f(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}\,; \quad a = -1$
3) $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x^2+1}\,; \quad a = 1$

Exercice VI :

1) la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$

admet une tangente en chacun de ses points. Pourquoi ?

2) a) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$

b) Interpréter géométriquement le résultat.

3) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ a un coefficient directeur égal à 3.

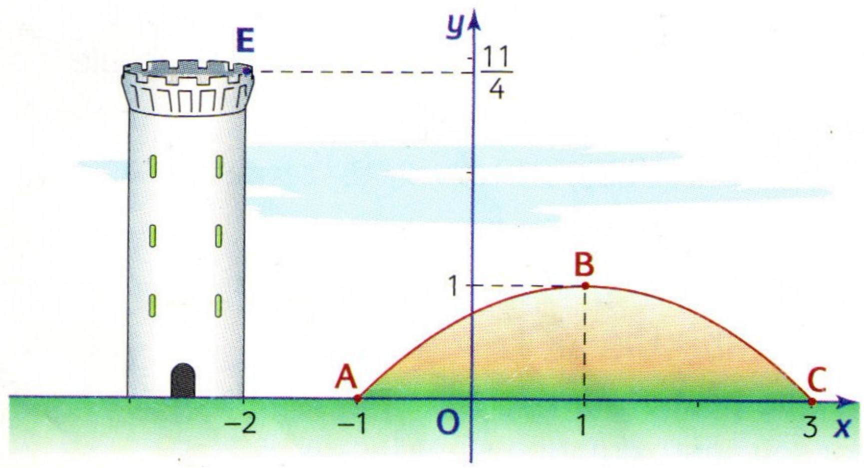
4) Existe-t-il des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = cx + d$ (où c et d sont deux réels) ? Discuter en fonction de c.

Exercice VII :

Point de vue !

Sur la figure ci-dessous, "l'arc" de parabole ABC représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses. Un observateur est placé en E de coordonnée $\left(-2; \dfrac{11}{4}\right)$ dans le repère choisi.

Le but de cet exercice est de déterminer les point de la colline et ceux du sol (au-delà de la colline) qui ne sont pas visibles de point d'observation E.



1) On note f la fonction définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer a, b, c pour que "l'arc" ABC soit la représentation de f.
2) a) Reproduire la figure et indiquer sur la figure les points de la colline et ceux du sol qui ne sont pas visible de E.
   b) Faire les calculs nécessaires pour trouver les abscisses de ces points.

Exercice VIII :

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. Déterminer ensuite le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

1) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$
2) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$
3) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$
5) $f(x) = x + 1 - \dfrac{2x}{x+3}$
6) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$
7) $f(x) = \left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^2$
8) $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{2x}{x+3}$
9) $f(x) = \sqrt{x-1}\,\sqrt{3-x}$
10) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}\sqrt{x}$
11) $f(x) = \left(\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right)^2$

Exercice IX :

Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement : position, vitesse, accélération d'un solide en physique.

Deux mobiles M_1 et M_2 sont sur l'axe des abscisses animé d'un mouvement dont les lois horaires (position en fonction du temps t) en fonction t sont respectivement

$$x_1(t) = 2t^2 + t + 4 \quad \text{et} \quad x_2 = -t^2 + 5t + 8$$

1) Calculer l'instant auquel les deux mobiles se rencontrent.
2) Calculer les vitesses respectives de ces deux mobiles à cet instant.
3) En déduire si lors de la rencontre, les deux mobiles se croisent ou si l'un dépasse l'autre.

Travail informatique : simuler(position et vitesse) des deux mobiles en fonction du temps avec "Géogébra". Par exemple ces deux moments à $t = 0$ et $t = 1$.

Exercice X :

Pour les fonctions suivantes, étudier les variations sur leur ensemble de définition. On dressera le tableau de variation

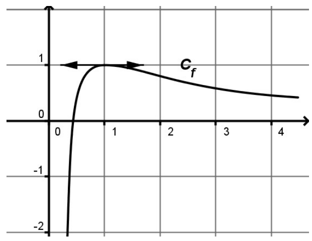
1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$
2) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$
3) $f(x) = -x^4 - 4x^2 + 5$
4) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x+4}$
5) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-9}$
6) $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{2}{x-3}$
7) $f(x) = \dfrac{-3x}{1+x^2}$
8) $f(x) = 1 - x - \dfrac{1}{x-1}$
9) $f(x) = \dfrac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3}$
10) $f(x) = x\sqrt{x+3}$

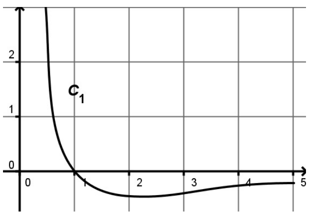
Exercice XI :

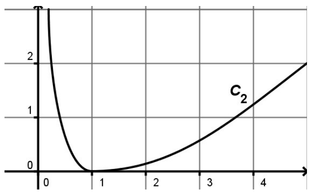
Reconnaître une courbe

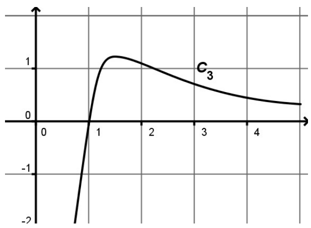
La figure ci-contre est la représentation graphique C_f d'une fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$

Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f.









Exercice XII :

On donne le tableau de variation de la fonction f suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	1	↘	‖	↘	-1	↗	2	↘	

1) Quel est l'ensemble de définition de f ? Quel est celui de f' ?

2) f possède-t-elle des extremums locaux ?
3) Esquisser une courbe possible pour f.
4) 2 est-il le maximum de f ?

Exercice XIII :

Théorème des valeurs intermédiaires

1) f est la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0; 1]$ une unique solution. Déterminer un encadrement à 10^{-3} de cette solution.

2) f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$

   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0; 1]$ et une unique solution dans $[7, 8]$. Déterminer un encadrement à 10^{-3} de ces solutions.

3) Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
   a) Etudier les variation de f et dresser son tableau de variation.
   b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1; 2[$
   c) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice XIV :

Trouver une solution

On considère une fonction f dont on ne connaît que quelques propriétés.

➪ f est définie sur l'ensemble $D_f = [-2; -1[\cup] - 1; +\infty[$
➪ f est dérivable sur D_f.
➪ sur D_f sa dérivée s'annule en -2 et en 0.
➪ le signe de sa dérivée est donné par le tableau suivant :

x	-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

1) a) Donner les variation de f.
   b) si $-1 < a < b < 0$, comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   c) si $-1 < a < b < 2$, peut-on comparer les nombres $f(a)$ et $f(b)$?
   d) Si $a = 2$ et $b = 0$, peut-on comparer les nombres$f(a)$ et $f(b)$?
2) On sait de plus que f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{x^2 + mx + n}{x + p}$$

   où m, n et p sont des réels, p étant non nul
   Trouver une foncion f satisfaisont aux propriétés précédentes

Exercice XV :

Minimum

1) Etudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$
2) En déduire le minimum sur $[-2; 2]$ de la fonction g définie par ;

$$g(x) = \frac{1}{-x^2 + 4x - 3}$$

Exercice XVI :

Fonction auxiliaire

1) Démontrer que l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

2) Exploiter les résultats du 1) pour résoudre les questions suivantes :
   a) Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$g(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}$$

   b) Etudier les positions des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions suivantes définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x(x-1) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Exercice XVII :

Fonction auxiliaire bis

1) Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 6x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 24$$

2) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]-2; -1[$
   b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.

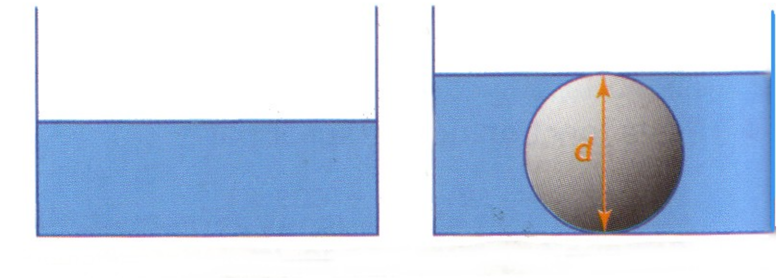
3) En déduire les variations de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{3}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 24x - 10$$

Exercice XVIII :

Problème d'immersion

On dispose d'un récipient cylindrique de rayon 40 cm contenant de l'eau dont la hauteur est 20 cm. On y plonge une bille sphérique de diamètre d (en cm) et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille. Le but de cet exercice est de calculer le diamètre d de la bille.



1) Vérifier que d est solution du système

$$\begin{cases} 0 \leqslant d \leqslant 80 \\ d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0 \end{cases}$$

2) f est la fonction sur $[0; 80]$ par :

$$f(x) = x^3 - 96\,000x + 192\,000$$

a) Etudier les variations de f

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur $[0; 80]$.

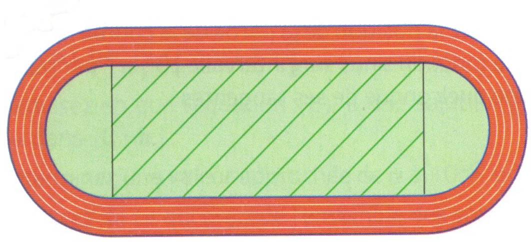
c) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de d.

Exercice XIX :

Optimisation

1) Un stade olympique a la forme d'un rectangle avec deux demi-cercles aux extrémités. La longueur de la piste intérieur est imposée et mesure 400 m.

Quelle dimensions doit-on donner au stade pour que la surface rectangulaire hachurée soit maximale ?

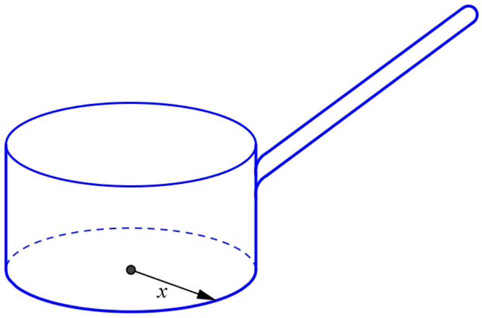


2) **Le problème de l'éditeur**

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes : sur chaque page le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm^2, les marges doivent mesurer 1,5 cm sur les bords horizontaux et de 2 cm sur les bords verticaux.

Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?

3) **Casserole** Pourquoi la hauteur d'une casserole est approximativement égale à son rayon quelque soit sa contenance ?



Pour répondre à cette question, on se propose de résoudre le problème suivant :

Comment fabriquer une casserole de volume v donné avec le moins de matière possible ?

On suppose que le prix de revient du manche ne dépend pas des dimension de la casserole.
L'unité est le centimètre. On note x le rayon du cercle du fond, h la hauteur et $\mathscr{S}$ l'aire totale égale à l'aire latérale plus l'aire du fond.

a) Exprimer h en fonction de v et x

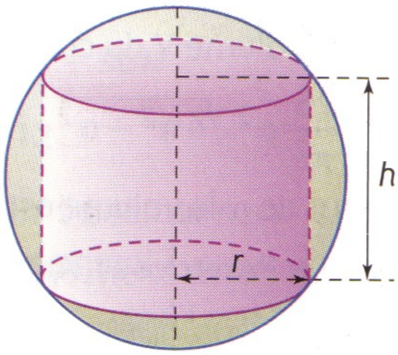
b) Exprimer $\mathscr{S}$ en fonction de v et de x.

c) Étudier sur $]0; +\infty[$ les variations de la fonction f définie par $f(x) = \pi x^2 + \dfrac{2v}{x}$

d) En déduire la réponse à la question

4) **cylindre inscrit dans une sphère**

Dans une sphère de rayon R, on inscrit un cylindre de hauteur h. Les deux bases du cylindre sont des cercles de la sphère de rayon r.



Pour quelle valeur de h le volume est-il maximal ?