Fiche technique sur les limites

1 Fonctions élémentaires

Les résultats suivants font référence dans de très nombreuses situations.

1.1 Limite en $+\infty$ et $-\infty$

$f(x)$	x^n	$\dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non défini	non défini

1.2 Limite en 0

$f(x)$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non défini

2 Asymptotes parallèles aux axes

Résultat sur f	Interprétation géométrique sur la courbe $\mathscr{C}_f$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$	La droite $y = \ell$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$	La droite $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$

3 Opération sur les limites et formes indéterminées

3.1 Somme de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

3.2 Produit de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
Alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞*	F. ind.	∞*

*Appliquer la règle des signes

3.3 Quotient de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ	∞
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

*Appliquer la règle des signes

4 Polynômes et les fonctions rationnelles

4.1 Fonction polynôme

Théorème 1 *Un polynôme a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus haut degré.*

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$$

4.2 Fonction rationnelle

Théorème 2 *Une fonction rationnelle a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus degré de son numérateur sur celui de son dénominateur.*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

4.3 Asymptote oblique

Théorème 3 *Dans une fonction rationnelle lorsque le degré du polynôme du numérateur est égale à celui de son dénominateur plus un, alors la représentation de cette fonction $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et $-\infty$.*

$$\text{Soit} \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{et} \quad d^\circ P = d^\circ Q + 1$$

$$\text{Soit la droite } (D) \text{ d'équation} \quad y = ax + b \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to\infty} [(f(x) - (ax+b)] = 0$$