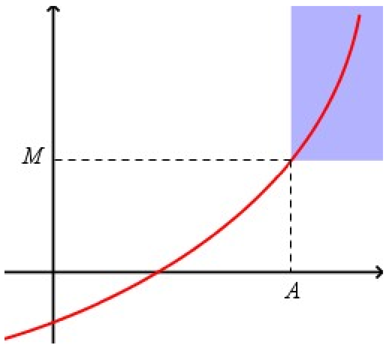
Comportement asymptotique

Table des matières

Le but de ce chapitre est de déterminer le comportement d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition.

1 Limite infinie en l'infini

1.1 Limite positive infinie en + l'infini



La fonction f n'est pas majorée en $+\infty$.

Aussi grand que soit M, il existe un réel A au delà duquel $f(x)$ est plus grand que M

On peut donner une définition plus rigoureurse ci-dessous :

$$\forall M > 0\,, \exists\, A \text{ tel que } x > A \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

On écrira dans ce cas : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

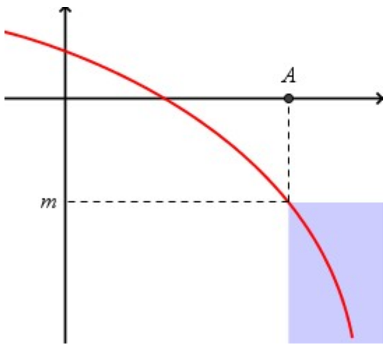
Exemple : Soit la fonction carrée soit : $f(x) = x^2$

On veut que $x^2 > M$ soit $x > \sqrt{M}$ (pour x>0), on a donc :

$$\forall M > 0\,, \exists\, A = \sqrt{M} \quad \text{tel que} \quad x > A \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

On a ainsi : $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

1.2 Limite négative infinie en + l'infini



La fonction f n'est pas minorée en $+\infty$.

Aussi grand négatif que soit m, il existe un réel A au delà duquel $f(x)$ est plus petit que m

On peut donner une définition plus rigoureurse ci-dessous :

$$\forall m < 0\,, \exists\, A \text{ tel que } x > A \;\Rightarrow\; f(x) < m$$

On écrira dans ce cas : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

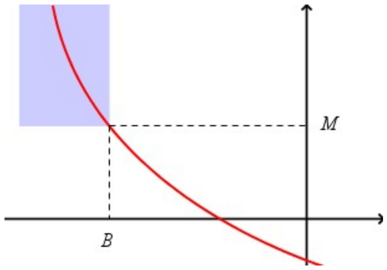
Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 3 - \sqrt{x}$

On veut que $3 - \sqrt{x} < m \Leftrightarrow -\sqrt{x} < m - 3 \Leftrightarrow x > (-m+3)^2$, on a donc :

$$\forall m < 0\,, \exists\, A = (-m+3)^2 \quad \text{tel que} \quad x > A \;\Rightarrow\; f(x) < m$$

On a ainsi : $\lim_{x \to +\infty} 3 - \sqrt{x} = -\infty$

1.3 Limite positive infinie en - l'infini



Aussi grand que soit M, il existe un réel B au deçà duquel $f(x)$ est plus grand que M

On peut donner une définition plus rigoureurse ci-dessous :

La fonction f n'est pas majorée en $-\infty$. $\forall M > 0\,,\exists\, B$ tel que $x < B \;\Rightarrow\; f(x) > M$

On écrira dans ce cas : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

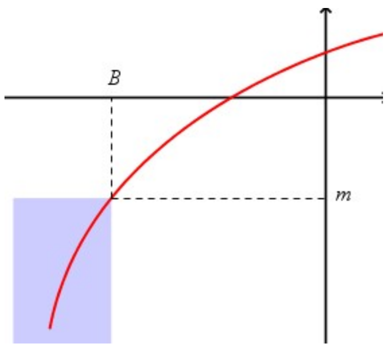
Exemple : Soit la fonction carrée soit : $f(x) = x^2$

On veut que $x^2 > M \Leftrightarrow -x > \sqrt{M}$ (pour x<0) $\Leftrightarrow x < -\sqrt{M}$, on a donc :

$$\forall M > 0\,,\exists\, B = -\sqrt{M} \quad \text{tel que} \quad x < B \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

On a ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

1.4 Limite négative infinie en - l'infini



La fonction f n'est pas minorée en $-\infty$.

Aussi grand négatif que soit m, il existe un réel B au deçà duquel $f(x)$ est plus petit que m

On peut donner une définition plus rigoureurse ci-dessous :

$\forall m < 0\,,\exists\, B$ tel que $x < B \;\Rightarrow\; f(x) < m$

On écrira dans ce cas : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

Exemple : Soit la fonction cube soit : $f(x) = x^3$

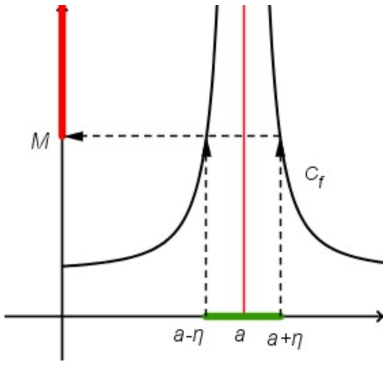
On veut que $x^3 < m \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{m}$, on a donc :

$$\forall m < 0\,,\exists\, B = \sqrt[3]{m} \quad \text{tel que} \quad x < B \;\Rightarrow\; f(x) < m$$

On a ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

2 Limite infinie en a

2.1 Limite positive infinie en a



La fonction f n'est pas majorée autour de a.

Aussi grand que soit M, il existe un intervalle ouvert centré en a tel que $f(x)$ est plus grand que M

On peut donner une définition plus rigoureurse ci-dessous :

$$\forall M > 0\,, \exists\, \eta \text{ tel que } |x-a| < \eta \text{ et } x \neq a \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

On écrira dans ce cas : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty}$

Remarque : On dit que la droite $y = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de f

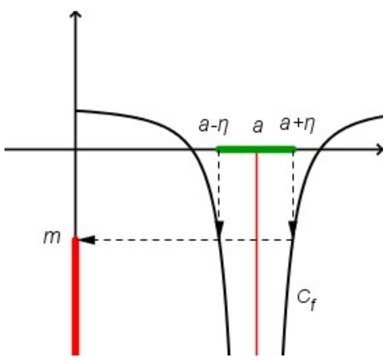
Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

On veut que $\dfrac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \dfrac{1}{M} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{M}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, on a donc :

$$\forall M > 0\,, \exists\, \eta = \frac{1}{\sqrt{M}} \quad \text{tel que} \quad |x| < \eta \text{ et } x \neq 0 \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

On a ainsi : $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

2.2 Limite négative infinie en a



La fonction f n'est pas minorée autour de a.

Aussi grand négatif que soit m, il existe un intervalle ouvert centré en a tel que $f(x)$ est plus petit que m

On peut donner une définition plus rigoureurse ci-dessous :

$$\forall m < 0\,, \exists\, \eta \text{ tel que } |x-a| < \eta \text{ et } x \neq a \;\Rightarrow\; f(x) < m$$

On écrira dans ce cas : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty}$

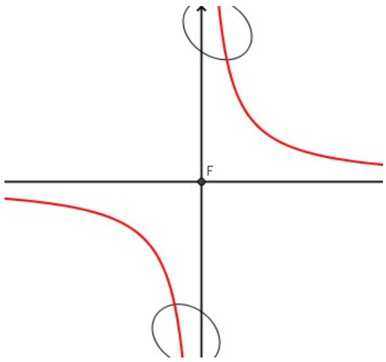
Remarque : On dit que la droite $y = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de f

2.3 Limite à droite et à gauche en a

Il peut se passer que la limite à droite et à gauche de a ne soit pas le même infini. Il n'y a alors pas de limite en a. On parle alors de **limite à droite et à gauche** en a.

On écrit alors par exemple : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty}$

C'est par exemple le cas de la fonction inverse en 0.



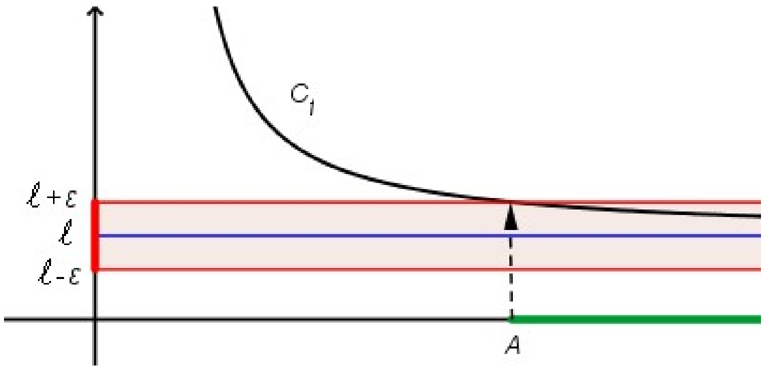
On a alors :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

3 Limite finie

3.1 Limite finie en l'infini



Pour tout intervalle ouvert autour de ℓ il existe un réel A au delà duquel $f(x)$ se trouve dans cet intervalle

On peut donner une définition plus rigoureurse ci-dessous :

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists\, A \text{ tel que } x > A \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \epsilon$$

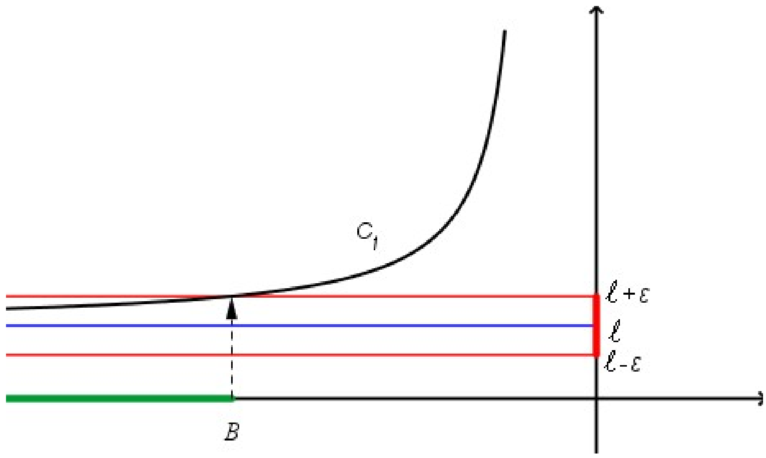
On écrira alors : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell}$

Remarque : On dit que la droite $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f

Exemple : C'est la cas de la fonction inverse en $+\infty$. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

On a le cas symétrique en $-\infty$



Pour tout intervalle ouvert autour de ℓ il existe un réel B au deçà duquel $f(x)$ se trouve dans cet intervalle

On peut donner une définition plus rigoureurse ci-dessous :

$$\forall \epsilon > 0 \,, \exists\, B \text{ tel que } x < B \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \epsilon$$

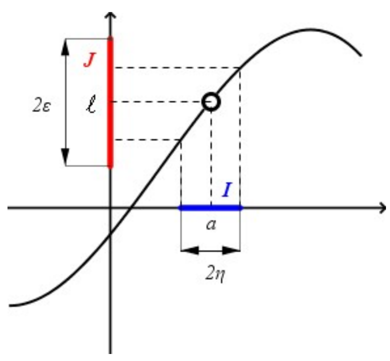
On écrira alors : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell}$

Remarque : On dit que la droite $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f

Exemple : C'est la cas de la fonction inverse en $-\infty$. On a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

3.2 Limite finie en a



La fonction f n'est pas défini en a.

Pour tout intervalle ouvert J centré en ℓ , on peut trouver un intervalle ouvert I centré en a tel que $f(x)$ soit dans l'intervalle J

On peut donner une définition plus rigoureurse ci-dessous :

$$\forall \epsilon > 0 \,, \exists\, \eta \text{ tel que } |x - a| < \eta \text{ et } x \neq a \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On écrira dans ce cas : $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell}$

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

Déterminer la limite de f en 3. Il faut alors changer la forme de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \\ &= \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} \end{aligned}$$

En passant à la limite, on trouve : $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{6}$

4 Limites des fonctions élémentaires

4.1 Limite en $+\infty$ et $-\infty$

$f(x)$	x^n	$\dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non défini	non défini

Remarque : Pour les fonctions du type $\dfrac{1}{x^n}$, l'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$ et $-\infty$

4.2 Limite en 0

$f(x)$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non défini

Remarque : Ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote en 0.

5 Opération sur les limites et formes indéterminées

5.1 Somme de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Exemples :

1) Limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2) Limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par somme, on ne peut conclure} \\ \textbf{Forme indéterminée : } +\infty - \infty \end{array}$$

5.2 Produit de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞*	F. ind.	∞*

*Appliquer la règle des signes

Exemples :

1) Limite en $-\infty$ de la fonction précédente : $f(x) = x^2 + x$

Pour lever la forme indéterminée, on change la forme de $f(x)$.

$$f(x) = x^2 + x = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On a alors avec le produit :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

2) Limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

On ne peut résoudre par la somme par c'est une forme indéterminée, on change alors la forme de $f(x)$

$$f(x) = x - \sqrt{x} = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

3) Limite à droite de 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sin x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit, on ne peut conclure} \\ \textbf{Forme indéterminée } 0 \times \infty \end{array}$$

5.3 Quotient de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ	∞
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

*Appliquer la règle des signes

Exemples :

1) Limite en -2 de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

On a le tableau de signes de $x - 2$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2} 2x - 1 = -5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x + 2 = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x + 2 = 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = +\infty \end{array}$$

On en déduit alors une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

2) Limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$

Comme le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini en $+\infty$, nous avons une forme indéterminée : $\dfrac{\infty}{\infty}$. Il faut donc changer la forme de $f(x)$.

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{2+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x}}$$

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3+\dfrac{1}{x} = 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{2}{3} \end{array}$$

6 Limite en l'infini des fonctions polynômes et rationnelles

6.1 Fonction polynôme

Théorème 1 : Un polynôme a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus haut degré.

$$\text{Si} \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x_0 \quad \text{alors}$$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$$

Démonstration : : On admettra ce théorème, qui peut aisément se démontrer en factorisant par le monôme du plus degré.

Exemples :

1) Limite en $+\infty$ du polynôme P, défini par : $P(x) = 5x^2 - 6x + 1$

D'après le théorème, on a

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} 5x^2 = +\infty$$

2) Limite en $-\infty$ du polynôme Q, défini par : $Q(x) = 4x^3 + 2x^2 + 4$

D'après le théorème, on a

$$\lim_{x\to-\infty} Q(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$$

6.2 Fonction rationnelle

Théorème 2 : Une fonction rationnelle a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus degré de son numérateur sur celui de son dénominateur.

$$\text{Si} \quad f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 x_0} \quad \text{alors}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Démonstration : : On admettra ce théorème, qui peut aisément se démontrer en factorisant par le monôme du plus degré le numératuer et le dénominateur.

Exemples :

1) Limite en $+\infty$ de la fonction f, définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

D'après le théorème, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

2) Limite en $-\infty$ de la fonction g, défini par : $g(x) = \dfrac{4x^2 + 3x - 5}{3x^2 - 1}$

D'après le théorème, on a

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Il y aura alors une asymptote horizontale d'équation : $x = \dfrac{4}{3}$

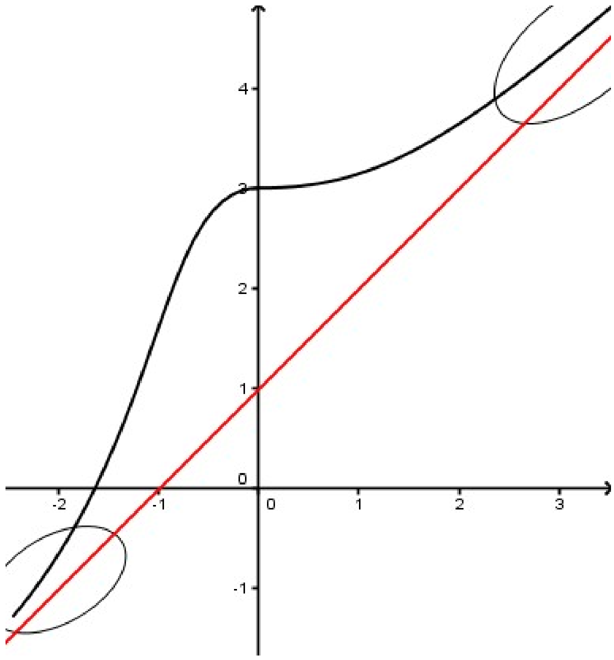
6.3 Asymptote oblique

Définition 1 : Une courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ ou $-\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Remarque : La courbe se rapproche de plus en plus de la droite asymptote lorsque x devient de plus en plus grand soit en valeur positive soit en valeur négative.

Exemple : On obtient par exemple le graphisme suivant :



Théorème 3 : Dans une fonction rationnelle lorsque le degré du polynôme du numérateur est égale à celui de son dénominateur plus un, alors la représentation de cette fonction $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et $-\infty$.

Soit $\quad f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \quad$ et $\quad d^\circ P = d^\circ Q + 1$

Soit la droite (D) d'équation $y = ax + b$ alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [(f(x) - (ax+b)] = 0$

Exemple : Soit la fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x+1}$$

Déterminer l'asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$. On précisera de plus la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

Le numérateur de la fonction f est de degré 2 et celui de son dénominateur est de degré 1, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Pour déterminer cette asymptote, il faut changer la forme de $f(x)$. Il faut déterminer les coefficient a, b et c tel que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

Il y a deux méthode pour déterminer ces coefficients.

1re méthode : par identification

On réduit la deuxième forme au même dénominateur puis on identifie à la première forme.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1} \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a=2 \\ a+b=-3 \\ b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \\ c=6 \end{cases}$$

On obtient ainsi : $f(x) = 2x-5+\dfrac{6}{x+1}$

2e méthode : par division euclidienne

On effectue une division en base x. On a alors :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^2-2x & 2x-5 \\ \cline{1-1} 0x^2-5x+1 & \\ +5x+5 & \\ \cline{1-1} 0x+6 & \end{array}$$

On a alors :

$$f(x) = 2x-5+\frac{6}{x+1}$$

Montrons maitenant que la droite d'équation $y = 2x-5$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et $-\infty$. On calcule :

$$f(x)-(2x-5) = \frac{6}{x+1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6}{x+1} = 0$. On a donc :

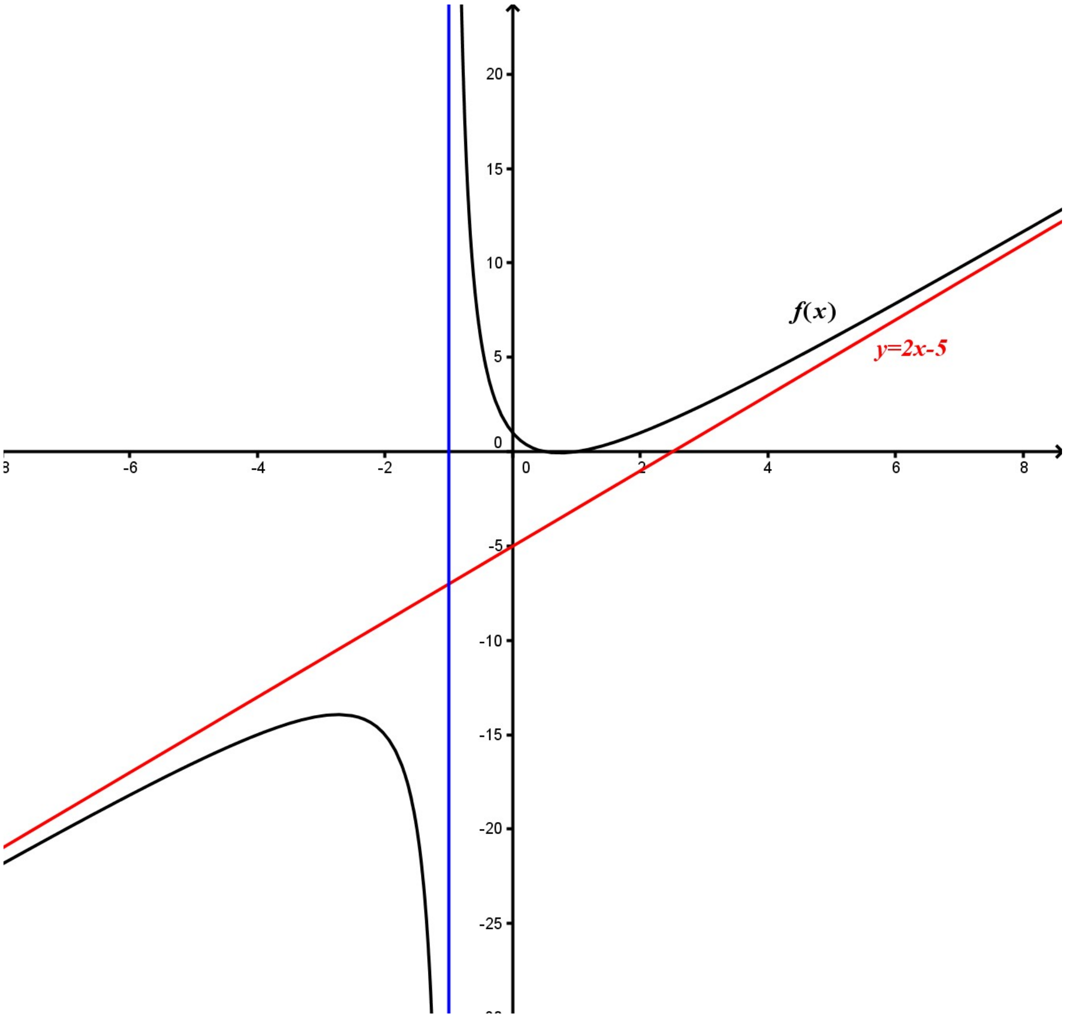
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(2x-5)] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x)-(2x-5)] = 0$$

La droite d'équation $y = 2x-5$ est donc asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Déterminons le signe de $f(x)-(2x-5) = \dfrac{6}{x+1}$ pour connaître la position de l'asymptote par rapport à la courbe. Le signe de $\dfrac{6}{x+1}$ est du signe de $x+1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

On en déduit que la courbe est au dessus de l'asymptote en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$. On obtient la courbe suivante :



7 Étude d'une fonction

7.1 Plan d'étude

Pour étudier une fonction, on sera amener à étudier les différente rubriques suivantes.

- Détermination de l'ensemble de définition de la fonction D_f.
- Parité de la fonction. Ensemble d'étude.
- Calcul des limites aux bornes de l'ensemble de définition ou de l'ensemble d'étude. Asymptotes éventuelles.
- Calcul de la dérivée de la fonction. Ensemble de validité de la dérivée.
- Signe de la dérivée et tableau de variation.

- Asymptote oblique et position de la courbe.(éventuellement changement de forme de la fonction faisant apparaître l'asymptote).
- Point ou axe de symétrie éventuel.
- Calcul éventuel de l'équation d'une tangente en un point d'abscisse a.
- Traçage de la courbe avec les asymptotes, les tangentes horizontales et le point ou l'axe de symétrie éventuel.

7.2 Une fonction très classique

Étude de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^2+2x+5}{2x+2}$

- L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- La fonction n'est ni paire ni impaire.
- Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition.

  1) En l'infini

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty$$

  On en déduit de même que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

  2) Limite en 1

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1} -x^2+2x+5 = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} 2x+2 = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} 2x+2 = 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient, on a} \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty \end{array}$$

  on en déduit une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

- Calcul de la dérivée : la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-2x+2)(2x+2) - 2(-x^2+2x+5)}{(2x+2)^2} \\ &= \frac{-4x^2-4x+4x+4+2x^2-4x-10}{(2x+2)^2} \\ &= \frac{-2x^2-4x-6}{(2x+2)^2} \end{aligned}$$

- Le signe de $f'(x)$ est du signe de $-2x^2-4x-6$

  Racine de $-2x^2-4x-6$: $\Delta = 16 - 48 = -32$ comme $\Delta < 0$ la dérivée est toujours négative sur D_f.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

➪ Comme le degré du numérateur est supérieur de 1 à celui du dénominateur, il y a une asymptote oblique. Changeons la forme de la fonction f pour déterminer cette asymptote (soit par identification ou division euclidienne). par exemle par identification, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{2x+2} \\ &= \frac{2ax^2 + 2ax + 2bx + 2b + c}{2x+2} \\ &= \frac{2ax^2 + 2(a+b)x + 2b + c}{2x+2} \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\begin{cases} 2a = -1 \\ 2(a+b) = 2 \\ 2b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{2} \\ c = 2 \end{cases}$$

On obtient alors : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{x+1}$

On calcule la quantité : $f(x) - \left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{x+1}$. En passant à la limite, on trouve facilement que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+1} = 0^-$$

On en déduit que la droite Δ d'équation $y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus en $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est **au dessus** de Δ et en $-\infty$ **en dessous**.

➪ En traçant l'allure de la courbe, on peut conjecturer que l'intersection des asymptote $I(-1;2)$ est centre de symétrie. Démontrons cette conjecture. On fait le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ Y = f(x) - 2 \end{cases}$$

On pose $Y = g(X)$, on a alors :

$$\begin{aligned} g(X) &= \frac{-(X-1)^2 + 2(X-1) + 5}{2(X-1)+2} - 2 \\ &= \frac{-X^2 + 2X - 1 + 2X - 2 + 5 - 4X}{2X} \\ &= \frac{-X^2 + 2}{2X} \end{aligned}$$

Montrons que la fonction g est impaire :

$$g(-X) = \frac{(-X)^2 + 2}{-2X} = -\frac{X^2+2}{X} = -g(X)$$

La fonction g est impaire donc I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

➪ Calculons les tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses -2 et 0.

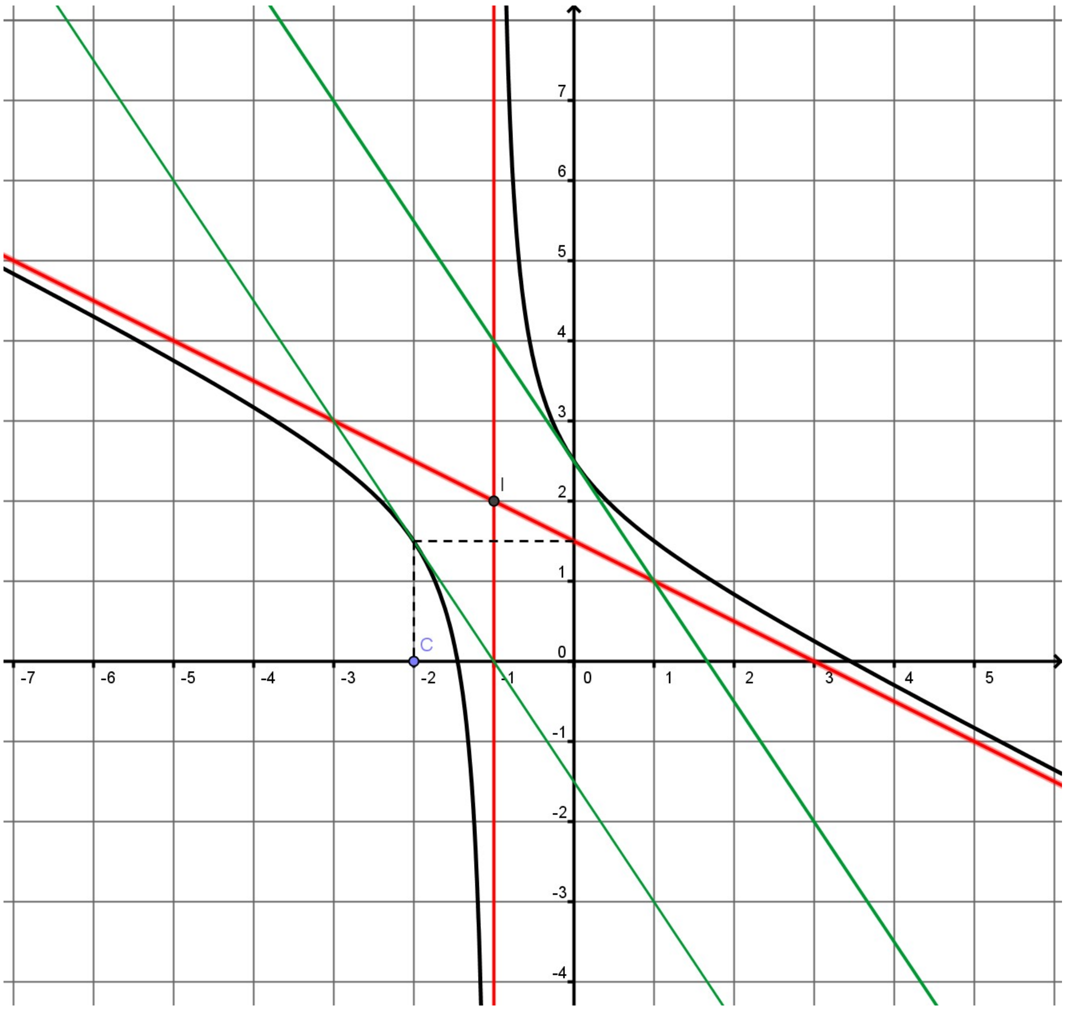
1) En $x = -2$, on a :

$$\begin{aligned} y &= f'(-2)(x+2) + f(-2) \\ &= -\frac{3}{2}(x+2) + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2) En $x = 0$, on a :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)x + f(0) \\ &= -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

➪ À l'aide de ces deux points et ces deux tangentes, des deux asymptotes, on peut ainsi avoir un tracé assez précis de la courbe $\mathscr{C}_f$.
On obtient ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$, les asymptotes et les deux tangentes :



7.3 Une fonction bornée

Étude de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

- L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ car le dénominateur est la somme de deux carrés dont un non nul.

- Parité de la fonction :

$$f(-x)=\frac{-2x}{(-x)^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}=-f(x)$$

La fonction f est impaire donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine. On étudiera la fonction sur $\mathbb{R}_+$.

- Limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

➪ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

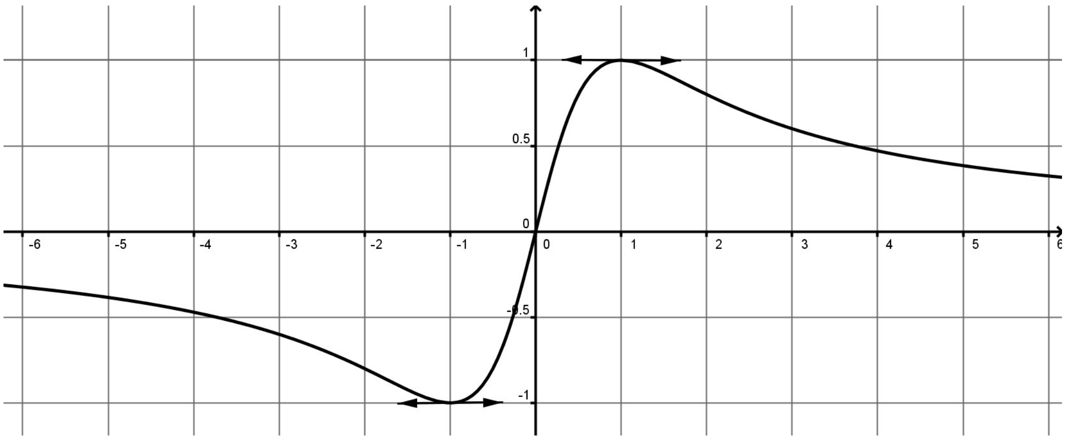
L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$

➪ Le signe de $f'(x)$ est le signe du trimôme $-2(x-1)(x+1)$ et s'annule pour $x=1$ ou $x=-1$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

La fonction f est donc bornée : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$

➪ On trace la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les tangentes horizontales.



7.4 Fonction et point d'inflexion

Étude de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$

➪ L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

➪ La fonction n'est ni paire ni impaire.

➪ Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition.

1) En l'infini

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

On en déduit de même que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2) Limite en 1

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1} x^3 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x->-1}} x+1 = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x+1=0^- \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par quotient, on a}\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=+\infty\end{array}$$

on en déduit une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

➪ Calcul de la dérivée : la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

➪ Le signe de $f'(x)$ est du signe de $2x+3$ et la dérivée s'annule en $-\dfrac{3}{2}$ et 0

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$\frac{27}{4}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$

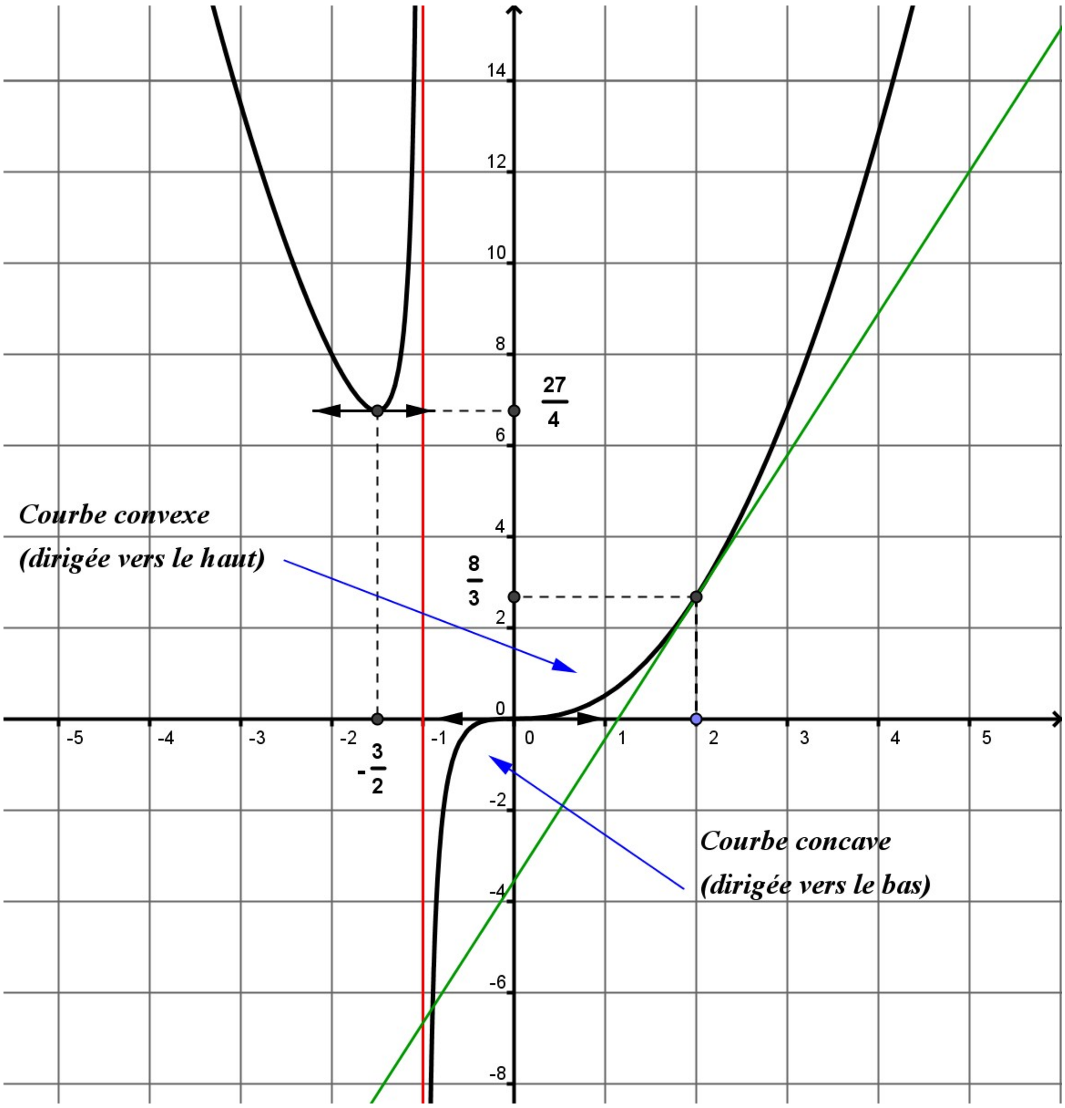
On observe que la dérivée s'annule mais ne change pas de signe en 0. La courbe admet alors un point d'inflexion, c'est à dire qu'en ce point la courbe change de concavité.

➪ La courbe n'admet pas d'asymptote oblique. Elle admet un brancha parabolique par rapport à l'axe des ordonnées.

➪ Équation de la tangente au point d'abscisse 2. On a alors :

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ &= \frac{28}{9}(x-2) + \frac{8}{3} \\ &= \frac{28}{9}x - \frac{32}{9} \end{aligned}$$

➪ On trace alors $\mathscr{C}_f$, l'asymptote, les tangentes horizontales et la tangente en $x = 2$. On obtient alors :



14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
27/4
8/3
-3/2
Courbe convexe
(dirigée vers le haut)
Courbe concave
(dirigée vers le bas)