Suites numériques

Table des matières

1 Suite numérique **2**
1.1 Définition . . . 2
1.2 Définir une suite . . . 2
1.2.1 De façon explicite . . . 2
1.2.2 Par récurrence . . . 3
1.3 Variation d'une suite . . . 3

2 Suite arithmétique **5**
2.1 Définition . . . 5
2.2 Comment reconnaît-on une suite arithmétique ? . . . 5
2.3 Expression du terme général en fonction de n . . . 6
2.4 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique . . . 7
2.4.1 Somme des n premiers naturels . . . 7
2.4.2 Somme des n+1 premiers termes . . . 7
2.4.3 Somme des n-p+1 premiers termes . . . 8
2.4.4 Conclusion . . . 8

3 Suite géométrique **10**
3.1 Définition . . . 10
3.2 Comment reconnaît-on une suite géométrique ? . . . 10
3.3 Expression du terme général en fonction de n . . . 11
3.4 Somme des premiers termes d'une suite géométrique . . . 12
3.4.1 Somme des n+1 premières puissances de q . . . 12
3.4.2 Somme des n+1 premiers termes . . . 13
3.4.3 Somme des n-p+1 premiers termes . . . 13
3.4.4 Conclusion . . . 14
3.5 Suite arithmético-géométrique . . . 14

4 Convergence d'une suite **15**
4.1 Définition . . . 15
4.2 Théorèmes sur les limites . . . 15
4.3 Théorème des gendarmes . . . 17
4.4 Limite d'une suite géométrique . . . 18
4.4.1 Notion de limite infinie . . . 18
4.4.2 Convergence d'une suite géoùétrique . . . 18
4.4.3 Limite de la somme des termes . . . 18

1 Suite numérique

1.1 Définition

Définition 1 : Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une succession de nombres réels ordonnés.
A un rang donné n, on associe un nombre réel u_n.

$$(u_n) \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

Exemple : Soit la suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$1,\ 4,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ \dots$$

On peut alors associer :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_2 = 7,\ u_3 = 11,\ u_4 = 15,\ u_5 = 19,\ \dots$$

1.2 Définir une suite

1.2.1 De façon explicite

Définition 2 : Une suite (u_n) est définie de façon explicite si le terme général u_n s'exprime en fonction de n.

$$u_n = f(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemples :

Soit la suite (u_n) telle que : $u_n = 3n + 5$. Par exemple :

$$u_{10} = 3 \times 10 + 5 = 35$$

Soit la suite (v_n) telle que : $v_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$. Par exemple :

$$v_5 = \frac{2 \times 5 - 1}{5+1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

1.2.2 Par récurrence

Définition 3 : Lorsque le terme général u_n dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une relation de récurrence et d'un ou des premier(s) terme(s).
La suite est dite récurrente à un terme si u_n ne dépend que du terme précédent. Cette suite est alors définie par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

La suite est dite récurrente à deux termes si u_n dépend des deux termes qui le précèdent. Cette suite est alors définie par :

$$u_0 \, , u_1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$$

La fonction f ainsi définie s'appelle la **fonction associée** à la suite (u_n)

Exemples :

- On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.

$$\begin{aligned} u_1 &= 3u_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4 \\ u_2 &= 3u_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10 \\ u_3 &= 3u_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = 28 \\ u_4 &= 3u_3 - 2 = 3 \times 28 - 2 = 82 \end{aligned}$$

- On donne la suite (v_n) définie par : $v_0 = 2$, $v_1 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$. Déterminer v_2, v_3, v_4, v_5.

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + v_0 = 1 + 2 = 3 \\ v_3 &= v_2 + v_1 = 3 + 1 = 4 \\ v_4 &= v_3 + v_2 = 4 + 3 = 7 \\ v_5 &= v_4 + v_3 = 7 + 4 = 11 \end{aligned}$$

1.3 Variation d'une suite

Définition 4 : On dit qu'une suite est strictement croissante si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$$

On dit qu'une suite est strictement décroissante si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$$

Si une suite est soit croissante, soit décroissante, la suite est dite monotone.

Dans la pratique pour déterminer la variation d'une suite, on déterminera le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si cette différence est positive, pour tout n, la suite sera croissante. Si la différence est négative pour tout n, la suite sera décroissante.

Lorsque tous les termes de la suite sont positifs, on peut aussi calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si ce rapport est supérieur à 1 pour tout n, la suite sera croissante. Si le rapport est inférieur à 1 pour tout n, la suite sera décroissante.

Exemples :

➪ Montrer que la suite définie par : $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ est croissante.

Calculons alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)-2}{(n+1)+1} - \frac{3n-2}{n+1} \\
&= \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} \\
&= \frac{(3n+1)(n+1)-(3n-2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{3n^2+3n+n+1-3n^2-6n+2n+4}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{5}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \dfrac{5}{(n+2)(n+1)} > 0$, la suite (u_n) est croissante.

➪ Montrer que la suite définie par : $v_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$ est décroissante.

Tous les termes de la suite sont positifs, calculons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\dfrac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}} \\
&= \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\
&= \frac{2^3 \times 2^{3n}}{3^2 \times 3^{2n}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\
&= \frac{2^3}{3^2} \\
&= \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{8}{9} < 1$, la suite (v_n) est décroissante.

2 Suite arithmétique

2.1 Définition

Définition 5 : Une suite arithmétique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$

  r étant la raison de la suite

Une suite arithmétique est donc définie par 2 termes : son premier terme et sa raison.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $r = 5$.
Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r = 2 + 5 = 7 \\ u_2 &= u_1 + r = 7 + 5 = 12 \\ u_3 &= u_2 + r = 12 + 5 = 17 \\ u_4 &= u_3 + r = 17 + 5 = 22 \end{aligned}$$

2.2 Comment reconnaît-on une suite arithmétique ?

Propriété 1 : Une suite est arithmérique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Exemple : Montrer que la suite définie par : $u_n = 2n + 3$ est arithmétique.

On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) + 3 - (2n+3) \\ &= 2n + 2 + 3 - 2n - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = 2$.

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

2.3 Expression du terme général en fonction de n

1) La suite commence à u_0.

On peut écrire les égalités suivantes à l'aide de la relation de récurrence :

$$
+\left.\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + r \\
u_2 &= u_1 + r \\
u_3 &= u_2 + r \\
&\vdots \\
u_{n-1} &= u_{n-2} + r \\
u_n &= u_{n-1} + r
\end{aligned}\right\} n \text{ termes}
$$

$$\overline{u_n = u_0 + n\,r}$$

Lorsque l'on additionne les n égalités les termes $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}$ s'éliminent. Il ne reste plus que le premier terme u_0 et le dernier u_n.

2) La suite commence à u_p.

On écrit les relations de u_{p+1} à u_n. On obtient alors $n - p$ termes, d'où la relation :

$$u_n = u_p + (n-p)\,r$$

Conclusion :

Propriété 2 : Le terme général u_n d'une suite arithmétique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- ➪ Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = u_0 + n\,r$
- ➪ Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = u_p + (n-p)\,r$

Application : Soit une suite (u_n) arithmétique de raison r. On donne : $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Trouver la raison r et le premier terme u_0.

1) On exprime u_{40} en fonction de u_{17}, on a alors :

$$\begin{aligned}
u_{40} &= u_{17} + (40-17)\,r \\
23r &= u_{40} - u_{17} \\
r &= \frac{70-24}{23} = 2
\end{aligned}$$

2) On peut alors trouver u_0.

$$\begin{aligned}
u_{17} &= u_0 + 17\,r \\
u_0 &= u_{17} - 17 \times 2 \\
u_0 &= 24 - 34 = -10
\end{aligned}$$

2.4 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

2.4.1 Somme des n premiers naturels

Carl-Friedrich Gauss était un élève très doué en mathématiques qui s'ennuyait un peu au cours de mathématiques en première année scolaire. Un jour, lorsqu'il dérangeait trop le cours, le maître lui donna comme punition de calculer la somme des 100 premiers nombres. Gauss y réfléchit un court instant et répondit 5050. Le maître le regardait tout étonné, se mit à vérifier le calcul et resta bouche bée.

"Mais comment as-tu fait pour trouver ce résultat aussi vite ?" lui demanda-t-il après un moment.

En effet comment a-t-il fait pour trouver ce résultat si vite. Evidemment il y a une astuce. Elle consiste à écrire la somme dans l'ordre croissant puis dans l'ordre décroissante et additionner les deux lignes. La plupart des termes s'éliminent. Généralisons ce résultat en sommant les n premiers naturels.

$$\begin{array}{rl} S_n &= 1+2+3+\cdots+(n-1)+n \\ S_n &= n+(n-1)+\cdots+3+2+1 \\ \hline 2S_n &= (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1) \end{array}$$

Comme il y a n termes, on peut donc écrire :

$$2S_n = n\,(n+1)$$

$$S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Application : Retrouvons le résultat de Gauss pour les 100 premiers naturels. On a alors $n = 100$. On trouve alors :

$$1+2+3+\cdots+99+100 = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

2.4.2 Somme des $n+1$ premiers termes

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Déterminons la somme des $n+1$ premiers termes (de u_0 à u_n) de la suite.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + n\,r) \\ &= (n+1)\,u_0 + r\,(1 + 2 + \cdots + n\,r) \end{aligned}$$

nous retrouvons la somme des n premiers naturels

$$\begin{aligned} &= (n+1)\,u_0 + r \times \frac{n\,(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\left(u_0 + \frac{n\,r}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{2u_0 + n\,r}{2}\right) \end{aligned}$$

de $u_n = u_0 + n\,r$, on en déduit que : $2u_0 + n\,r = u_0 + u_n$, donc

$$= (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

2.4.3 Somme des $n-p+1$ premiers termes

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p. Nous laissons au lecteur le soin de la démonstration de la somme des $n-p+1$ premiers termes (de u_p à u_n) de la suite.

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$$
$$S_n = (n-p+1)\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$$

2.4.4 Conclusion

Propriété 3 : Sur la somme des termes d'une suite arithmétique, on peut retenir les résultats suivants :

- La somme des n premiers naturels vérifie :

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

- La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

- La somme des $n-p+1$ d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_p vérifie :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$$

- D'une façon générale, la somme S_n des premiers termes d'une suite arithmétique vérifie :

$$S_n = \text{Nbre de termes} \times \left(\frac{\text{Somme des termes extrêmes}}{2}\right)$$

Application :

1) Calculer la somme des nombres impairs inférieurs à 100.
Généraliser ce résultat avec la somme des nombres impairs inférieurs à $2n$.

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1. On note :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

On donne $u_n = 14$, $r = 7$ et $S_n = -1176$. Déterminer n et u_1.

1) Il y a 50 nombres impairs inférieurs à 100. Le premier terme est 1 et le dernier 99, donc :

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+99 &= 50 \times \left(\frac{1+99}{2}\right) \\ &= 50^2 \\ &= 2500 \end{aligned}$$

Généralisons ce résultat. Il y a n nombres impairs inférieurs à $2n$. Le premier terme est 1 et le dernier $2n-1$

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2n-1) &= n \times \left[\frac{1+(2n-1)}{2}\right] \\ &= n \times \left(\frac{2n}{2}\right) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

La somme des n premiers nombres impairs est égal à n^2.

2) Déterminons le premier terme u_1 en fonction de u_n.

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)\,r \\ u_1 &= u_n - (n-1)\,r \\ u_1 &= 14 - 7(n-1) \\ u_1 &= 21 - 7n \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} S_n &= -1176 \\ (n-1+1)\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right) &= -1176 \\ n\left(\frac{21-7n+14}{2}\right) &= -1176 \\ n(35-7n) &= -2352 \\ 35n - 7n^2 + 2352 &= 0 \\ -7n^2 + 35n + 2352 &= 0 \end{aligned}$$

On peut diviser par 7 l'équation, on trouve alors :

$$-n^2 + 5n + 336 = 0$$

On calcule alors le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= 25 + 4 \times 336 \\ &= 25 + 1344 \\ &= 1369 \\ &= 37^2 \end{aligned}$$

On obtient alors les deux racines suivantes :

$$n' = \frac{-5+37}{-2} = -16 \quad \text{non retenu car négative}$$
$$n'' = \frac{-5-37}{-2} = 21$$

Conclusion : $n = 21$ et $u_1 = 21 - 7 \times 21 = -126$

3 Suite géométrique

3.1 Définition

Définition 6 : Une suite géométrique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$

  q étant la raison de la suite

Une suite géométrique est donc définie par 2 termes : son premier terme et sa raison.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $q = 2$.
Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.

$$u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$$
$$u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$$
$$u_3 = q \times u_2 = 2 \times 12 = 24$$
$$u_4 = q \times u_3 = 2 \times 24 = 48$$

3.2 Comment reconnaît-on une suite géométrique ?

Propriété 4 : Une suite est géométrique lorsque le rapport entre deux termes consécutifs est constant. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Exemple : Montrer que la suite définie par : $u_n = 5^{n+3}$ est géométrique.

On calcule le rapport entre deux termes consécutifs quelconques :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1+3}}{5^{n+3}}$$
$$= 5^{n+1+3-n-3}$$
$$= 5$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 5.$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 5^3 = 125$.

3.3 Expression du terme général en fonction de n

1) La suite commence à u_0.

Pour obtenir le terme suivant, en fonction du précédent, on multiplie par q. Pour obtenir u_n on a multiplié n fois par q à partir de u_0. On a donc :

$$u_n = q^n\, u_0$$

2) La suite commence à u_p.

De u_p à u_n, on a multiplié $n - p$ fois par q, donc :

$$u_n = q^{n-p}\, u_p$$

Conclusion :

Propriété 5 : Le terme général u_n d'une suite géométrique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- ➪ Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = q^n\, u_0$
- ➪ Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = q^{n-p}\, u_p$

Application : Soit une suite (u_n) géométrique de raison q. On donne : $u_7 = 4\,374 \quad \text{et} \quad u_5 = 486$. Trouver la raison q et le premier terme u_0 et u_{10} sachant que la raison est positive.

1) On exprime u_5 en fonction de u_7, on a alors :

$$u_7 = q^{7-5} u_5$$
$$q^2 = \frac{u_7}{u_5}$$
$$q^2 = \frac{4\,374}{486} = 9$$

On obtient les deux solutions : $q = 3$ ou $q = -3$. Comme la raison est positive, $q = 3$.

2) On peut alors trouver u_0.

$$u_5 = q^5\, u_0$$
$$u_0 = \frac{u_5}{q^5}$$
$$u_0 = \frac{486}{243} = 2$$

3) On peut trouver aussi u_{10}

$$\begin{aligned} u_{10} &= q^{10-7}\, u_7 \\ u_{10} &= 3^3 \times 4\,374 \\ u_{10} &= 27 \times 4\,374 = 118\,098 \end{aligned}$$

3.4 Somme des premiers termes d'une suite géométrique

3.4.1 Somme des $n+1$ premières puissances de q

Soit donc la somme :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$$

En soustrayant les deux lignes suivantes, on obtient :

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\ q \times S_n = & \quad\; q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} \\ \hline S_n - q \times S_n = & 1 - q^{n+1} \end{array}$$

On obtient alors :

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Application : La légende raconte qu'un roi de Perse voulu récompenser l'inventeur du jeu d'échecs. Après avoir réfléchi, ce dernier lui proposa " Vous déposerez un grain de riz sur la première case, puis deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, vous doublez ainsi le nombre de grains en passant d'une case à l'autre jusqu'à la 64ème et je vous prends tous les grains ". " Ce n'est pas une grosse récompense " lui répondit le roi. Qu'en pensez-vous ? Quelle masse de blé cela représente-t-il ?

On pourra considérer que $2^{10} \simeq 10^3$. La masse d'un grain de riz est de 40 mg environ et la production mondiale annuelle en 2006 était de 580 millions de tonnes.

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

Le nombre de grains de riz sur n^e case de l'échiquier correspond à une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 1$. Si on veut connaître le nombre de grains de riz sur l'échiquier, il suffit de calculer :

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63}$$

On obtient alors :

$$\frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1$$

Comme $2^{10} \simeq 10^3$, on a alors

$$2^{64} = 2^4 \times (2^{10})^6 \simeq 16 \times (10^3)^6 \simeq 16 \times 10^{18}$$

Si la masse d'un grain de riz est de 40 mg, la masse de riz en mg est d'environ :

$$40 \times 16 \times 10^{18} = 640 \times 10^{18} = 6,4 \times 10^{20} \text{ mg}$$

Si on convertit cette masse en tonne :

$$1 \text{ T} = 10^3 \text{ kg} = 10^3 \times 10^3 \text{ g} = 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \text{ mg} = 10^9 \text{ mg}$$

On obtient alors :

$$6,4 \times 10^{20} \text{ mg} = 6,4 \times 10^{11} \text{ T} = 640 \text{ milliards de tonnes !}$$

3.4.2 Somme des $n+1$ premiers termes

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1. Déterminons la somme des $n+1$ premiers termes (de u_0 à u_n) de la suite.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= u_0 + (q \times u_0) + (q^2 \times u_0) + \cdots + (q^n \times u_0) \\ &= u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \end{aligned}$$

Nous retrouvons la somme des $n+1$ premières puissances de q

$$= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

3.4.3 Somme des $n-p+1$ premiers termes

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p. Nous laissons au lecteur le soin de la démonstration de la somme des $n-p+1$ premiers termes (de u_p à u_n) de la suite.

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$$

$$S_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

3.4.4 Conclusion

Propriété 6 : Sur la somme des termes d'une suite géométrique, on peut retenir les résultats suivants :

- La somme des $n+1$ premières puissances de q vérifie :

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie :

$$u_0+u_1+\cdots+u_n = u_o \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- La somme des $n-p+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premiers termes u_p vérifie :

$$u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

- D'une façon générale, la somme S_n des premiers termes d'une suite géométrique vérifie :

$$S_n = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

3.5 Suite arithmético-géométrique

Une suite arithmético-géométrique (u_1) est une suite définie par :

- Un premier terme u_0
- la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$

Pour trouver le terme général, on introduit une suite auxiliaire qui est géométrique.

Exemple : Soit une suite (u_n) définie par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 2u_n + 5 \end{aligned}$$

On pose la suite (v_n) telle que $v_n = u_n + 5$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique

Il faut donc montrer que $\forall n \quad v_{n+1} = qv_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 5 \\ &= 2u_n + 5 + 5 \\ &= 2(u_n + 5) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Donc : $\forall n \quad v_{n+1} = 2v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 5 = 7$

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

Comme (v_n) est une suite géométrique, on a :

$$v_n = v_0 \cdot q^n = 7 \times 2^n$$

Comme $v_n = u_n + 5$, on a donc :

$$u_n = v_n - 5 = 7 \times 2^n - 5$$

4 Convergence d'une suite

4.1 Définition

Définition 7 : On dit qu'un réel ℓ est la limite d'une suite (u_n) si tout intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit alors que la suite converge vers ℓ. On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Cela veut dire, que quelque soit ϵ, l'intervalle $]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$ contient tous les termes de la suite à part un nombre fini de termes. On peut formaliser ce résultat par l'implication suivante : (non au programme)

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}, \quad n > N \quad \Rightarrow \quad |u_n - \ell| < \epsilon$$

Exemple : La suite (u_n) telle que $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0. On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Remarque : Une suite peut avoir comme limite $+\infty$ ou $-\infty$. On dit alors qu'elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Soit la suite (u_n) telle que $u_n = 2n + 1$.
On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

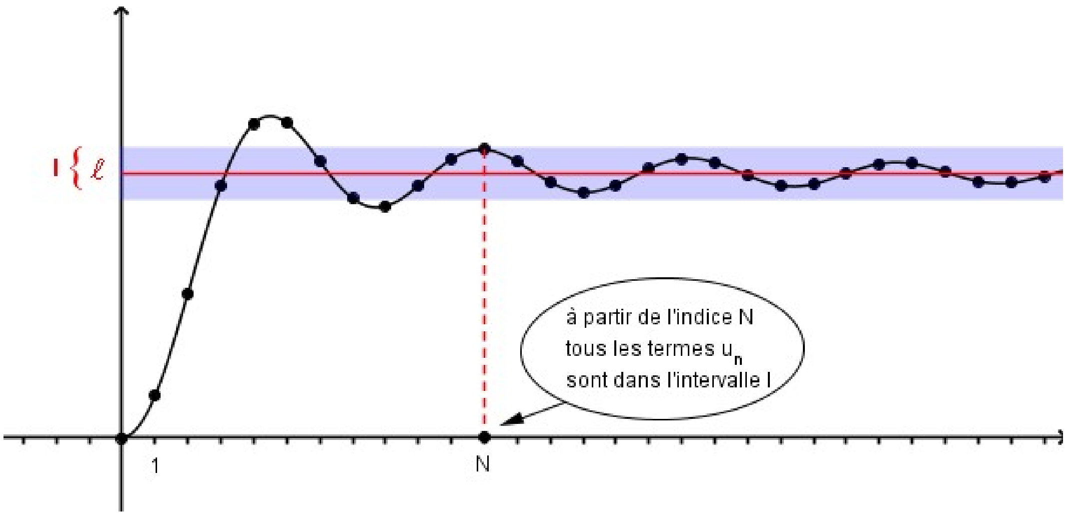
Un suite peut ne pas avoir de limite. On dit qu'elle diverge tout simplement. Soit la suite (u_n) telle que $u_n = (-1)^n$. Les termes de la suite sont alternativement 1 et -1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

4.2 Théorèmes sur les limites

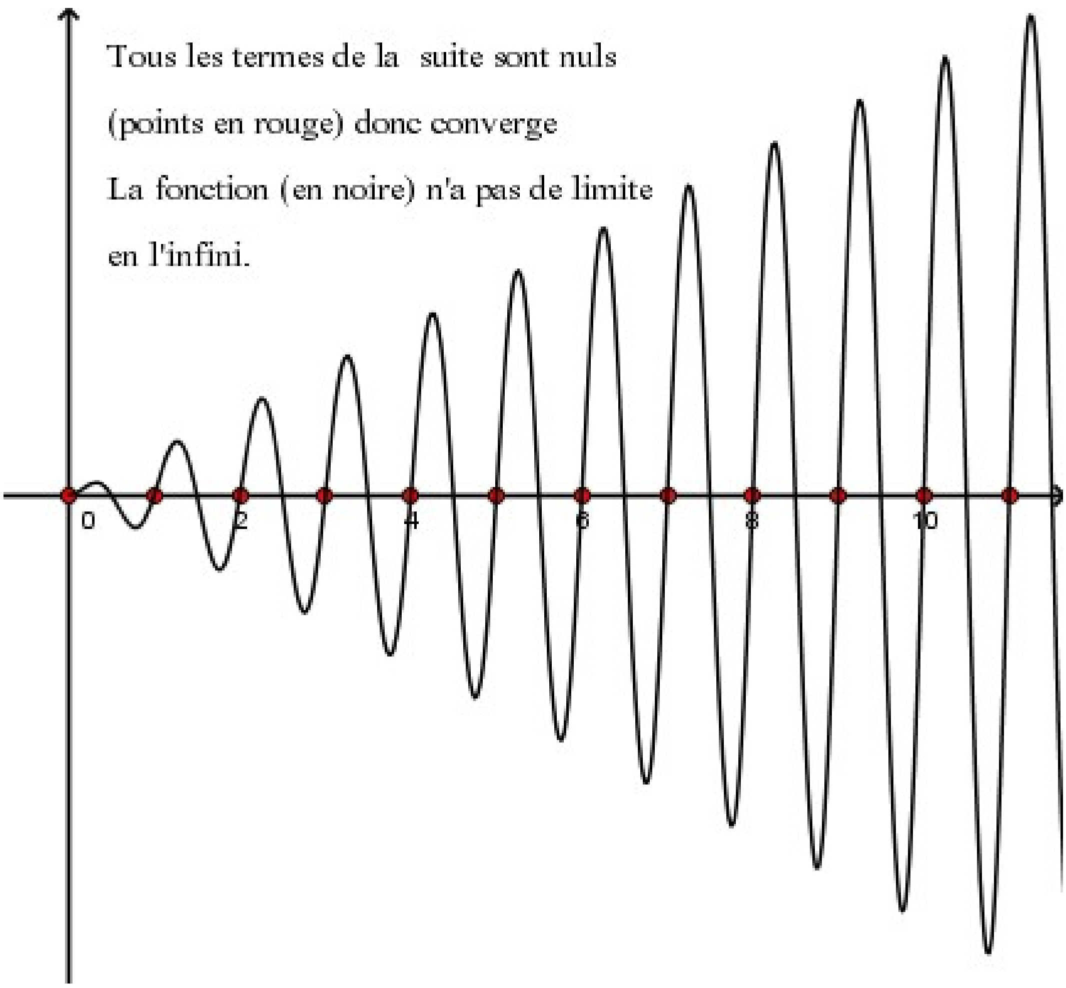
Théorème 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$, avec $a \geqslant 0$. Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$ avec $n \geqslant a$.

Si la fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Remarque : Ce théorème montre que si $f(x)$ tend vers ℓ pour des valeurs réelles x de plus en plus grandes alors pour les valeurs entières n de plus en plus grandes les valeurs de u_n s'accumule vers ℓ. Par exemple sur la figure ci-dessous.



La réciproque de ce théorème est fausse. En effet, on peut avoir une limite finie sur $\mathbb{N}$ et ne pas avoir de limite finie sur $\mathbb{R}$, comme le montre cet exemple :



Application : Soit un réel non nul a et un naturel non nul p. Les fonctions de référence de la forme $f(x) = \dfrac{a}{x^p}$ et $g(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x}}$ ont une limite nulle en $+\infty$, donc les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \dfrac{a}{n^p}$ et $v_n = \dfrac{a}{\sqrt{(n)}}$ convergent vers 0.

Théorème 2 : On retrouve les mêmes opérations avec les limites pour les suites qu'avec les fonctions, c'est à dire que la limite de la somme, du produit ou du quotient est la somme, le produit ou du quotient des limites.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = b$, alors :

➪ $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = a + b$

➪ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n = ab$

➪ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ avec $b \neq 0$

4.3 Théorème des gendarmes

Théorème 3 : Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si pour tout naturel n, on a : $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ avec $n > 0$. Etude de la convergence de la suite.

$$-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$$
$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Comme les suites $-\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n}$ convergent vers 0, alors d'après le théorème des gendarmes la suite (u_n) converge vers 0.

4.4 Limite d'une suite géométrique

4.4.1 Notion de limite infinie

Définition 8 : On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si pour tout réel M, aussi grand soit-il, il existe un rang N au delà duquel $u_n > M$. On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si pour tout réel m, aussi grand négatif soit-il, il existe un rang N au delà duquel $u_n < m$. On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Exemple : Les suites définies par $u_n = n^2$ et $v_n = -\sqrt{n}$ divergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.

4.4.2 Convergence d'une suite géoùétrique

(u_n) est une suite géométrique de raison q. Comme l'expression du terme général est de la forme : $u_n = u_0 q^n$, la convergence de la suite ne dépend que de la convergence de q^n. On admettra le théorème suivant :

Théorème 4 : Soit une suite géométrique de raison q.

- Si $-1 < q < 1$ alors la suite converge vers 0. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ la suite est constante et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$ la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe du premier terme. On a alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leqslant -1$ la suite diverge et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas.

Exemple : La suite géométrique de terme $u_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge vers 0 car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$. Par contre la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $1,5$ diverge vers $+\infty$ car $1,5 > 1$.

4.4.3 Limite de la somme des termes

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $\dfrac{3}{4}$. On note s_n la somme des $n+1$ premiers termes : $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1) Exprimer s_n en fonction de n.

2) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$.

1) D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$s_n = 3 \times \frac{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{3}{4}} = 12 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

2) Puisque $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ on peut donc conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 12$$