Suites Numériques

Exercices

Exercice 1 :

Définir une suite

Pour les exercices suivants, trouver la fonction f associée à la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et calculer les termes de u_1 à u_5

a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_1 + 1} \end{cases}$

Exercice 2 :

Conjecturer la forme explicite

Pour les suites suivantes, calculer les termes de u_1 à u_5 puis conjecturer une formule explicite du terme général. Trouver u_0 à partir de la formule conjecturée puis démontrer la relation donnée entre u_{n+1} et u_n.

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1 + u_n} \end{cases}$

Exercice 3 :

Variation d'une suite

Pour les exercices suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{3n - 2}{n + 1}$

b) $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$

c) $u_n = (n - 5)^2$

d) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - n$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2^n}{n}$

Exercice 4 :

Suite arithmétique

Pour las exercices suivant préciser si la suite (u_n) est arithmétique ou non

a) $u_n = 2n + 3$

b) $u_{n+1} = \dfrac{3n + 1}{2}$

c) $u_n = n^2 - n$

d) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}$

Exercice 5 :

Caractéristiques d'une suite arithmétique

Pour les exercices suivants, (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

a) $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$. Calculer r puis u_{2005}
c) $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Calculer r puis u_0.

b) $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$. Calculer r puis u_{20}

Exercice 6 :

Avec une suite auxiliaire

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Pour tout n on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$

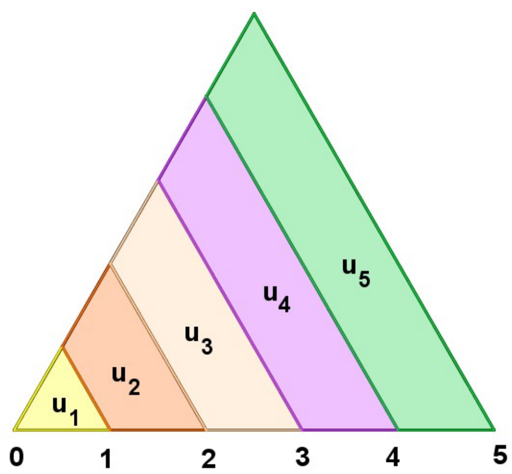
Calculer v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

c) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. Exprimer alors u_n en fonction de n.

Exercice 7 :

Avec des triangles équilatéraux

La figure ci-dessous, indique le début de la construction de zones colorées que l'on peut prolonger indéfiniment. Tous les triangles de la figure sont équilatéraux.



a) Prouver que la suite (u_n) des aires définies par la figure est arithmétique. Quelle est sa raison ?

b) La suite (v_n) des périmètres est-elle arithmétique ?

Exercice 8 :

Somme des termes

a) 1) Démontrer que la somme : $1 + 3 + 5 + \cdots + 99$ est le carré d'un naturel.

2) Calculer, en fonction de n, la somme des n premiers naturels impairs
$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

b) 1) Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 3 inférieurs à 1 000.

2) Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 5 onférieurs à 9 999.

3) Calculer la somme de tous les nombres entiers naturels inférieurs à 2 154 ayant 3 comme chiffre des unités.

c) (u_n) est une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_1 et de n^{e} terme u_n.
On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Les question sont indépendantes les unes des autres.

1) Calculer u_1 et S_{17} lorsque :

$$u_{17} = 105 \quad \text{et} \quad r = 2$$

2) Calculer u_1 et u_{33} lorsque :

$$r = -7 \quad \text{et} \quad S_{33} = 0$$

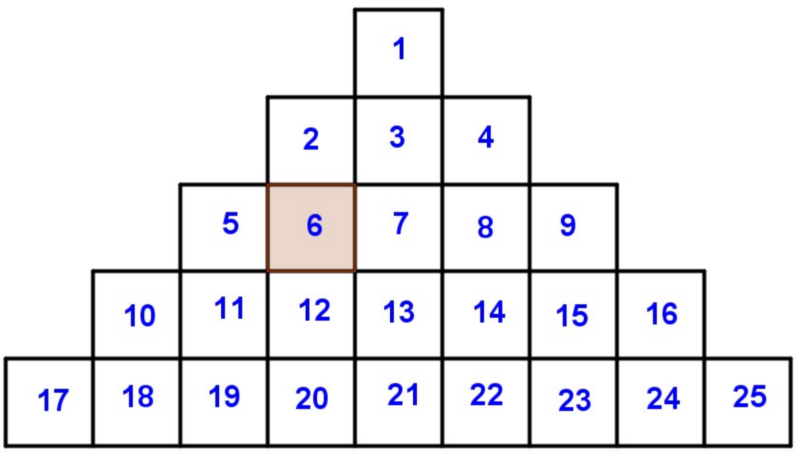
3) Calculer n et u_1 lorsque :

$$u_n = 14 \quad , \quad r = 7 \quad \text{et} \quad S_n = -1176$$

Exercice 9 :

Nombres pyramidaux

On suppose que la suite des entiers naturels est écrite dans un tableau selon la disposition ci-dessous. On représentera un nombre par le numéro de la ligne qui le contient et par son rang dans la ligne à partir de la gauche. Par exemple, 6. Le nombre 6 est au second rang de la troisième ligne. Dans quelle ligne se trouve le nombre 2 005 ? Quel est son rang dans cette ligne ?



Exercice 10 :

Suites géométriques

Pour les exercices suivants, préciser si la suite est géométrique ou non.

a) $u_n = 5^{n+3}$

b) $u_n = \dfrac{2n+3}{3}$

c) $u_n = 3^n + 3n$

d) $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5u_{n+1} - 2u_n = 1$

Exercice 11 :

Caractéristiques d'une suite géométrique

Pour les exercices suivants, (u_n) est une suite géométrique de raison q.

a) $u_0 = 4$ et $q = 5$. Exprimer u_n en fonction de n.

b) $u_4 = 8$ et $q = 2$. Calculer u_2 et u_6.

c) $u_5 = 10$ et $q = -\dfrac{1}{2}$. Calculer u_0 et u_{10}.

d) $u_5 = 64$, $u_7 = 256$, $q > 0$. Calculer q puis u_{10}

e) $u_5 = 486$, $u_7 = 4\,374$, $q > 0$. Calculer u_0 et u_{10}.

f) Pour tout naturel n, on a $\quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$
Tous les termes sont non nuls et sa raison q est positive. Trouver q.

g) (u_n) est une suite géométrique croissante dont les termes sont négatifs.
1) Que peut-on dire de sa raison ?
2) On sait que $u_1 \times u_3 = \dfrac{4}{9}$ et $\quad u_1 + u_2 + u_3 = -\dfrac{19}{9}$.
Calculer u_1, u_2 et u_3.
3) Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 12 :

Avec une suite auxiliaire

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

b) Pour tout naturel n, on pose $v_n = u_n + 5$.
Calculer v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5.

c) Prouver que la suite (v_n) est géométrique. Exprimer alors u_n en fonction de n.

Exercice 13 :

Somme de termes

a) Calculer : $S = 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^7$

b) Calculer : $S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots + \dfrac{1}{1\,048\,576}$

c) Calculer : $S = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} - \cdots - \dfrac{1}{6\,561}$

d) Calculer : $S = 1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{100} + \cdots + \dfrac{1}{10^7}$

e) (u_n) est une suite géométrique, $u_{10} = 25$ et $u_{13} = 200$.

1) Calculer u_0 et la raison q.

2) Calculer $u_{10} + u_{12} + u_{14} + \cdots + u_{20}$

Exercice 14 :

Limites de suites

Pour les exercices suivants, trouver la limite éventuelle de la suite (u_n) et justifier en énonçant le théorème utilisé

a) $u_n = \dfrac{5}{n^4}$, $n > 0$

b) $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2} + 3$, $n > 0$

c) $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $n > 0$

d) $u_n = \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(3 + \dfrac{2}{n^2}\right)$

e) $u_n = (0,2)^n$

f) $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

g) $u_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{n}{n^2+1}$

Exercice 15 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n}$

a) Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n).

b) On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$. Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. Vous donnerez son premier terme et sa raison.

c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 16 :

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}$.

a) Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n).

b) On pose $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$. Prouver que la suite (v_n) est géométrique.

c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 17 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3}$.

a) Conjecturer graphiquement la convergence de la suite.

b) On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1) Prouver que la suite (v_n) ainsi définie est géométrique.

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3) Quelle est la limite de (v_n) ? En déduire la limite de (u_n).

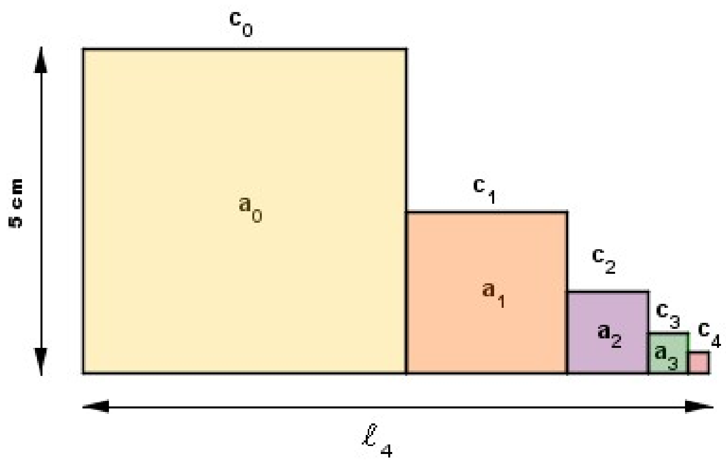
Exercice 18 :

Avec des carrés

n carrés sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous (réalisé avec 5 carrés). Le côté d'un carré vaut la moitié du précédent.

Le premier carré a pour côté $c_0 = 5$ cm et pour aire a_0.

On pose $\ell_n = c_0 = c_1 + \cdots + c_n$ et $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.



a) Calculer les cinq premiers termes des suites (ℓ_n) et (s_n).

b) 1) Exprimer ℓ_n et s_n en fonction de n.

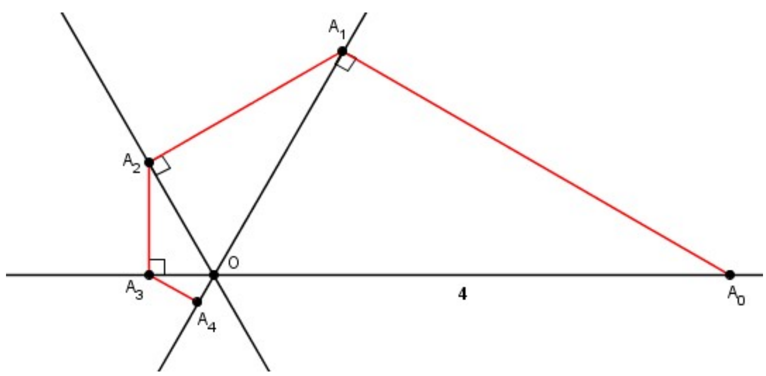
2) Existe-t-il un entier p tel que $\ell_p \geqslant 10$?

3) Donner la limite (éventuelle) de chacune des suites (ℓ_n) et (s_n).

Exercice 19 :

Construction géométrique

Les deux droites issues de O font des angles de $\dfrac{\pi}{3}$ et la mesure de OA_0 est 4.

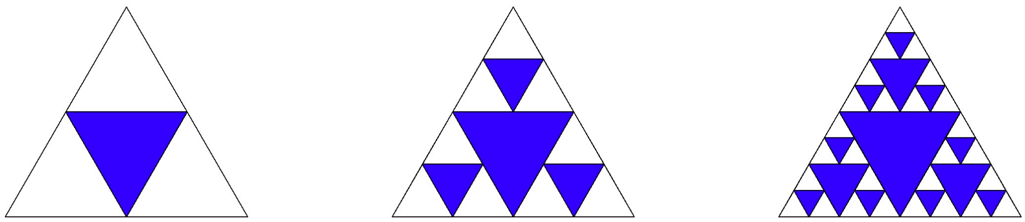


Quelle est la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$$

Exercice 20 :

Les triangles de Sierpinski



Etape 1 Etape 2 Etape 3

On part d'un triangle équilatéral de côté 10.

A chaque étape, on construit dans chaque triangle équilatéral (non colorié), le triangle équilatéral (colorié) ayant pour sommets les milieux des côtés.

On s'intéresse à l'aire S_n et au périmètre P_n de la surface coloriée à la n$^{\text{ième}}$ étape.

a) 1) Expliquer pourquoi, quel que soit l'entier n ,

$$S_n \leqslant 25\sqrt{3}$$

2) Conjecturer le sens de variation de S_n et de P_n, et leurs limites éventuelles.

b) Exprimer S_n et P_n en fonction de n puis déterminer, si elles existent : $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} P_n$

Exercice 21 :

Le flocon de Von Koch (1870 - 1934)

Soit un triangle équilatéral de côté a (figure 1). Sur chaque côté, on considére deux points qui partage ce côté en trois partie de même longueur. Sur chaque côté, on obtient ainsi trois segments ; sur le segment central, on construit vers l'extérieur un triangle équilatéral en supprimant le segment central. On obtient un polygone (figure 2). On réitère la procesus (figure 3) autant de fois que l'on souhaite.

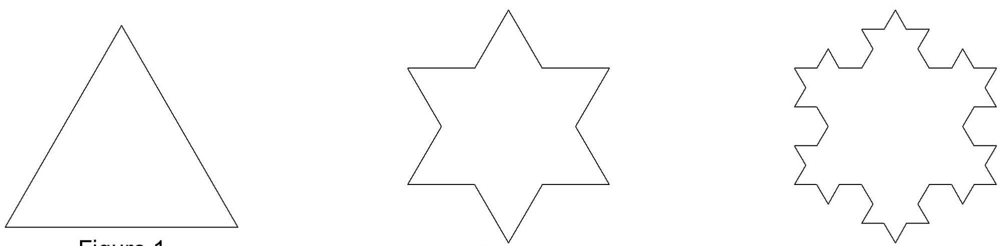


Figure 1 Figure 2 Figure 3

On note C_n le polygone obtenue à la n$^{\text{ième}}$ étape. On note p_n le périmètre de C_n et A_n l'aire de C_n.

a) Exprimer p_n en fonction de n. La suite (p_n) admet-elle une limite ?

b) Exprimer A_n en fonction de n. La suite (A_n) admet-elle une limite ?

c) Quelle conclusion peut-on donner à ces polynomes ainsi formés en ce qui concerne leur aire et leur périmètre.

Exercice 22 :

Suite récurrentes à deux termes.

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

a) 1) Démontrer que la suite (v_n) définie pae $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique.

2) Exprimer v_n en fonction de n.

b) 1) Exprimer u_n en fonction de n.

2) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

c) Déterminer le plus petit entier p tel que pour $n \geqslant p$: $|u_n - 3| < 10^{-5}$