Barycentre

Table des matières

1 Rappels sue les vecteurs

1.1 Définition

Définition 1 : Un vecteur $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$ est défini par :
- une direction (la droite (AB)).
- un sens (de A vers B)
- Une longueur : la norme du vecteur $\|\vec{u}\|$ ou AB

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

1.2 Opérations sur les vecteurs

1.2.1 Somme de deux vecteurs

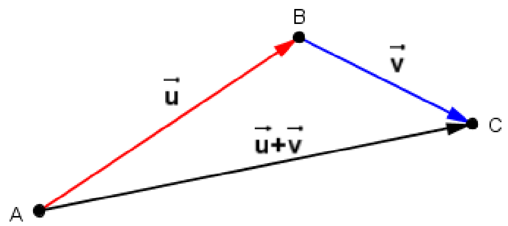
La somme : la relation de chasles :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

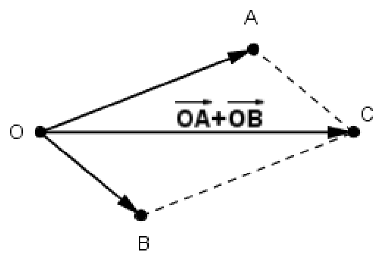
Cette relation permet de décomposer un vecteur.

On a l'inégalité triangulaire :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$



Construction de la somme de deux vecteurs de même origine. On effectue un parallélogramme, afin de reporter le deuxième vecteur permettant d'appliquer la relation de Chasles.



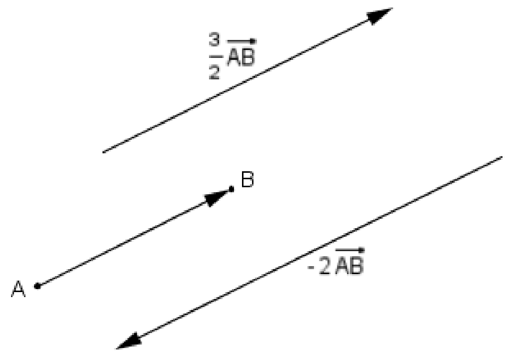
Propriété 1 : La somme de deux vecteurs :
- Est commutative : $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$
- Est associative : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
- Possède un élélment neutre $\vec{0}$: $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$
- tout vecteur possède un opposé $-\vec{u}$: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

1.2.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Lorsqu'on multiplie un vecteur par un réel k, appelé scalaire, le vecteur ainsi formé $k\vec{u}$ est tel que :

- Sa longueur est multiplié par $|k|$

➪ Si $k > 0$ son sens est inchangé et si $k < 0$ son sens est inversé.



Propriété 2 : La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition de deux vecteurs ou la somme de deux réels.

➪ $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

➪ $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{v}$

1.3 Vecteurs et configuration

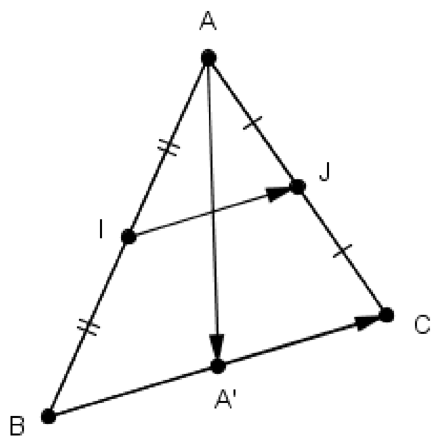
1.3.1 Le milieu d'un segment

Si I est le milieu d'un segment $[AB]$ alors :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$



Théorème 1 : Soit ABC un triangle. Si I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ alors :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

1.3.2 La médiane d'un triangle

Dans un triangle ABC, (AA') la médiane issue de A, vérifie :

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

1.4 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si et seulement si, il existe un réel k tel que :

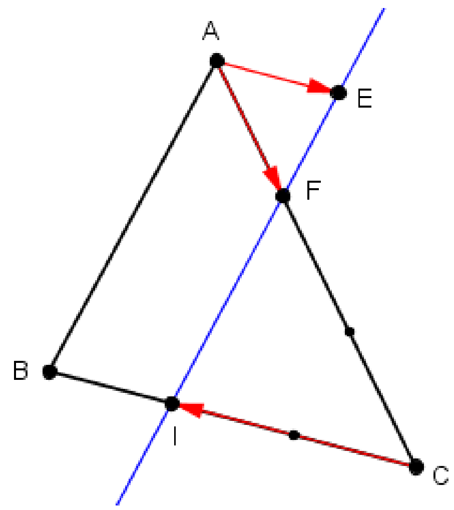
$$\vec{v} = k\vec{u}$$

Propriété 3 : La colinéarité permet de montrer le parallélisme et l'alignement.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Application : Soit ABC un triangle, E est tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, I est tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et F est tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que I, E et F sont alignés

Faisons d'abord une figure :



Exprimons $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Nous savons que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. On en déduit que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BI}$ donc que $AEIB$ est un parallélogramme. On a alors :

$$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AB}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

On en déduit alors : $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et donc les points E, F et I sont alignés.

1.5 Géométrie analytique

Propriété 4 : Mis à part les calculs de distance qui exige un repère orthonormal, les formules suivantes sont valable dans tout repère.

- Soit deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vérifient :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

- Soit deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ vérifient :

$$I = \begin{pmatrix} \dfrac{x_B + x_A}{2} \\ \\ \dfrac{y_B + y_A}{2} \end{pmatrix}$$

- On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, le nombre :

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \\ &= xy' - x'y \end{aligned}$$

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si, leur déterminant est égale à 0

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

- Dans un repère orthonormal, la norme d'un vecteur $\vec{u}$ et la distance entre les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ verifient :

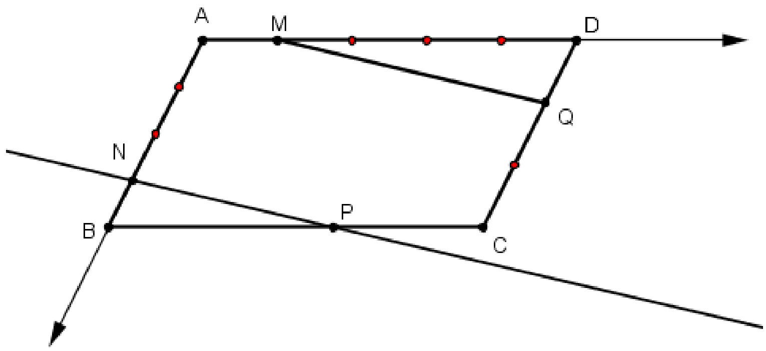
$$\begin{aligned} ||\vec{u}|| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{aligned}$$

Application : $ABCD$ est un parallèlogramme. M, N, Q sont tels que :

$$\overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

La parallèle à (MQ) menée par N coupe BC en P. Déterminer le coefficient k de colinéarité tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$.

Faisons une figure, en prenant comme repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:



D'après l'énoncé les coordonnées de M, N et Q sont :

$$M\left(0;\frac{1}{5}\right),\quad N\left(\frac{3}{4};0\right),\quad Q\left(\frac{1}{3};1\right)$$

Comme P est sur (BC), son abscisse est 1. De plus comme k est tel que : $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$, son ordonné vaut k. Les coordonnées de P sont :

$$P(1;k)$$

Comme $(NP)//(MQ)$, le déterminant de $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{NP}$ est nul, on a :

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{NP}) &= 0\\
\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-0 & 1-\frac{3}{4} \\ 1-\frac{1}{5} & k-0 \end{vmatrix} &= 0\\
\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{5} & k \end{vmatrix} &= 0\\
\frac{k}{3}-\frac{1}{5} &= 0\\
\frac{k}{3} &= \frac{1}{5}\\
k &= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

2 Barycentre de deux points

2.1 Définition

Remarque : Le mot barycentre renvoie à la notion de centre d'inertie ou de gravité en physique.

Définition 3 : On appelle barycentre de deux points A et B associés aux coefficients respectifs α et β, le point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \alpha + \beta \neq 0$$

On note alors G barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β)

Démonstration : montrons qu'un tel point existe et est unique. Il s'agit alors de pouvoir placer ce point. Exprimons le point G a l'aide du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} &= \vec{0} \\
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) &= \vec{0} \\
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\
(\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} &= -\beta\overrightarrow{AB} \\
-(\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} &= -\beta\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Comme $\alpha + \beta \neq 0$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

On peut alors placer le point G.

2.2 Propriétés

Propriété 5 : Si G est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

Application : A et B étant donnés, placer les barycentres G_1 et G_2 des points pondédérés respectifs $(A, 3)$, $(B, 1)$ et $(A, -1)$, $(B, 3)$.

Comme G_1 est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2 + 1}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

Comme G_2 est le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 3)$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{-1 + 3}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

On peut alors placer les deux point G_1 et G_2 :

Remarque :

- Lorsque $\alpha = \beta$, on dit que G est l'isobarycentre des points A et B. G est alors le milieu du segment $[AB]$.
- Le barycentre G est situé sur la droite (AB)

Propriété 6 : Homogénéité du barycentre. Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) alors G est aussi le barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$ lorsque k est un réel non nul.

Cela découle de la définition :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad k\alpha\,\overrightarrow{GA} + k\beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad k \neq 0$$

Application : Le barycentre de $\left(A, \dfrac{1}{10}\right)$ et $\left(B, \dfrac{1}{5}\right)$ est aussi le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$.

Propriété 7 : Le barycentre de deux point A et B, se situe sur la droite (AB). Réciproquement si trois points sont alignés, alors l'un est le barycentre des deux autres.

Application : Soit les trois alignés A, B et C alignés comme sur la figure ci-dessous. Montrer que C est le barycentre de (A, α) et (B, β).

D'après la figure on a : $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{CB}$
On a donc : $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

C est alors le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$

2.3 Réduction

Théorème 2 : **Formule de réduction**. Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) alors pour tout point M du plan, on a :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

Démonstration : en appliquant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB} &= \alpha(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+\beta(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})\\ &= \alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA})+\beta\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GA})\\ &= (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}\end{aligned}$$

Or G est le barycentre de (A,α) et (B,β) donc $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$$= (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

Application : Cette formule de réduction permet de déterminer les lignes de niveau c'est à dire de déterminer puis tracer l'ensemble des points M qui vérifient une relation vectorielle.

$[AB]$ est un segment de longueur 5 cm. Déterminer l'ensemble Γ des point M qui vérifient la relation (R) :

$$||2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}||=10$$

On pose le point G barycentre de $(A,2)$ et $(B,3)$, d'après la formule de réduction, on a :

$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$$

La relation (R) devient :

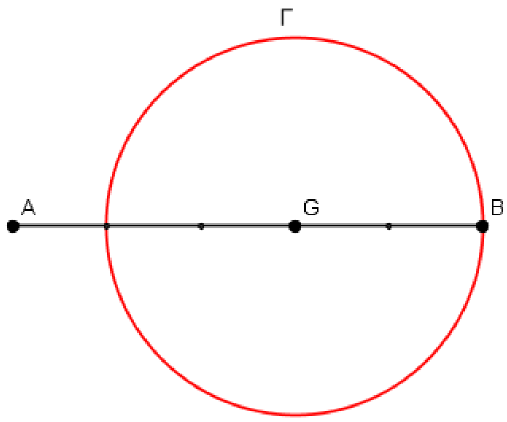
$$||5\overrightarrow{MG}||=10 \Leftrightarrow MG=2$$

L'ensemble Γ est donc le cercle de centre G est de rayon 2.

Pour tracer Γ, on trace d'abord G qui vérifie :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

On trace ensuite le cercle Γ en remarquant qu'il passe par B.



Propriété 8 : Si G est le barycentre de (A,α) et (B,β), alors les coordonnées du point G dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ vérifient :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$$

Cette formule dépend directement de la formule de réduction en prenant pour le point M le point origine O.

Application : On donne les point $A(1;3)$ et $B(2;1)$. Déterminer les coordonnées des point M, barycentre de $(A,-1)$ et $(B,3)$ et N, barycentre de $(A,2)$ et $(B,-1)$ puis placer les point A, B, M et N.

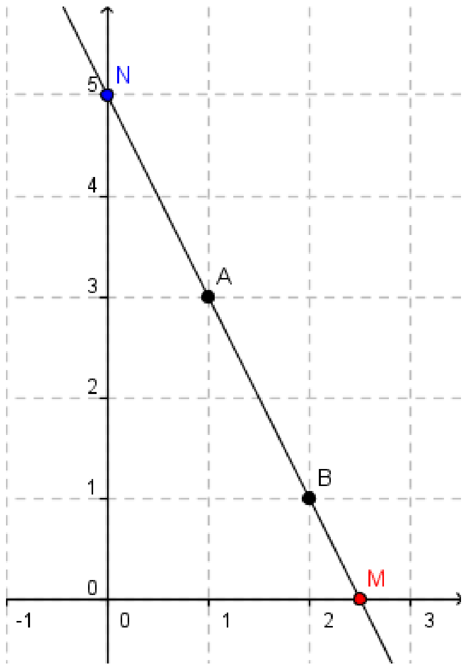
On applique la formule donnant les coordonnées du barycentre.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{-1}{-1+3}\,\overrightarrow{OA} + \frac{3}{-1+3}\,\overrightarrow{OB} = \frac{-1}{2}\,\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\,\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{2}{2-1}\,\overrightarrow{OA} + \frac{-1}{2-1}\,\overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

On obtient alors les coordonnées des point $M(x_M;y_M)$ et $N(x_N;y_N)$

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{-1}{2} \times 1 + \dfrac{3}{2} \times 2 = \dfrac{5}{2} \\ y_M = \dfrac{-1}{2} \times 3 + \dfrac{3}{2} \times 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_N = 2 \times 1 - 2 = 0 \\ y_N = 2 \times 3 - 1 = 5 \end{cases}$$



3 Barycentre de trois points

3.1 Définition

Définition 4 : On appelle barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ), le point G qui vérifie :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \qquad \text{avec } \alpha+\beta+\gamma \neq 0$$

Démonstration : montrons qu'un tel point existe et est unique. Exprimons le point G a l'aide du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GA} &= \vec{0} \\
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \gamma\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\
(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA} &= -\beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC} \\
-(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AG} &= -\beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Comme $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

On peut alors placer le point G.

Remarque : L'isobarycentre ($\alpha = \beta = \gamma$) de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

3.2 Associativité

Théorème 3 : Théorème d'associativité. Si G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) et si H est le barycentre de (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$ alors G est le barycentre de $(H, \alpha + \beta)$ et (C, γ).

Démonstration : toujours avec la relation de Chasles. On sait que G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) donc :

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} &= \vec{0} \\
\alpha(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HG}) + \beta(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB}) + \gamma\overrightarrow{GC} &= \vec{0} \\
(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH} + \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{GC} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

Comme H est le barycentre de (A, α) et (B, β), on a : $\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} = \vec{0}$

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

G est bien le barycentre de $(H, \alpha+\beta)$ et (C, γ).

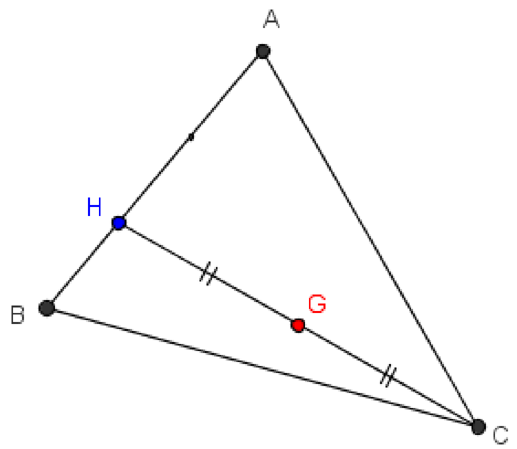
Application : Ce théorème est bien utile pour placer le barycentre de trois points car il permet de placer le barycentre de 3 points en plaçant coup sur coup le barycentre de deux points.

Soit un triangle ABC. Placer le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 3)$.

méthode 1 : Soit le point H barycentre de $(A,1)$ et $(B,2)$, on a alors :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de $(H,3)$ et $(C,3)$. G est donc l'isobarycentre de H et de C, G est donc le milieu de $[HC]$.

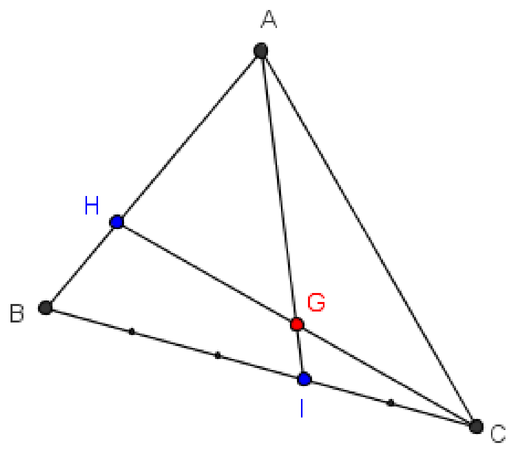


méthode 2 : Soit les point H et I respectivement barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$ et $(B,2)$, $(C,3)$. D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de $(H,3)$ et $(C,3)$ donc H, G et C sont alignés.

De même G est aussi d'après le théorème d'associativité, le barycentre de $(A,1)$ et $(I,5)$, donc les points A, G et I sont alignés.

G est donc l'intersection des droites (HC) et (AI). Il suffit alors de placer les points H et I.

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$$



3.3 Réduction

Théorème 4 : Formule de réduction et coordonnées de G : Si G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ), alors pour tout point M du plan on a :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Les coordonnées de G dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ vérifient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$$

Démonstration : Généralisation des formules pour le barycentre de 2 points.

Application 1 : Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 4$ cm. Déterminer et tracer Γ, l'ensemble des points M du plan tels que :

$$||-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|| = 4$$

On cherche à réduire l'expression de gauche en introduisant le point G barycentre des points $(A,1)$, $(B,-1)$ et $(C,2)$, on a alors grâce à la formule de réduction :

$$-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (-1+1+2)\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MG}$$

L'ensemble des points M revient à :

$$\begin{aligned} ||2\overrightarrow{MG}|| &= 4 \\ MG &= 2 \end{aligned}$$

L'ensemble Γ est donc le cercle de centre G et de rayon 2 cm.

Pour tracer Γ, il faut d'abord placer G puis déterminer si le cercle passe par un point particulier.

Pour placer G, on utilise le théorème d'associativité. On ne peut prendre comme barycentre intermédiaire les points A et B car la somme de leur coefficient est nulle. On pose alors H, barycentre des points $(B,-1)$ et $(C,2)$, on a alors :

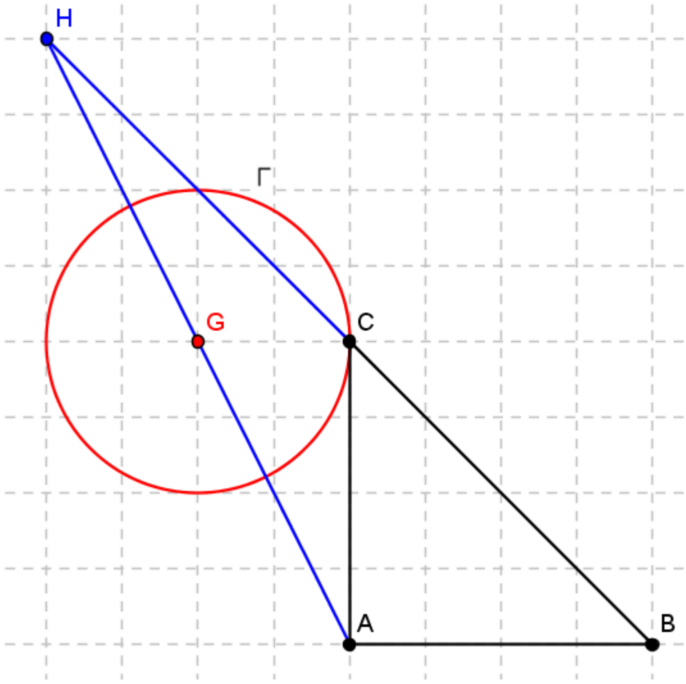
$$\overrightarrow{BH} = \frac{2}{-1+2}\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$$

G est alors le barycentre de $(A,1)$ et $(H,-1+2)$. Donc G est l'isobarycentre des points A et H. G est le milieu de $[AH]$

On observe que le point C appartient au cercle solution. Pour le vérifier, on remplace M dans la relation, on a alors :

$$||-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CC}|| = ||\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|| = AB = 4$$

La relation est vérifiée, donc le point C appartient à Γ. On pourrait aussi le montrer par le théorème des milieux. On obtient la figure suivante :



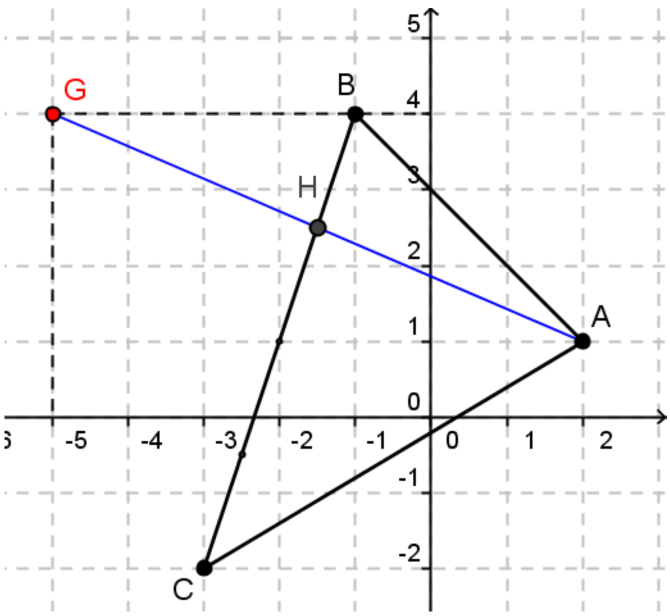
Application 2 : Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, placer les points $A(2;1)$, $B(-1;4)$ et $C(-3;-2)$. Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points $(A,-2)$, $(B,3)$ et $(C,1)$. Placer G.

On utilise la formule donnant les coordonnées de G :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{-2}{-2+3+1}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{-2+3+1}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{-2+3+1}\overrightarrow{OC}\\ &= -\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

On obtient alors les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = -2 + \frac{3}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times (-3) = -5 \\ y_G = -1 + \frac{3}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times -2 = 4 \end{cases}$$



4 Barycentre de n points

4.1 Définition

On peut généraliser la notion de barycentre à n points distincts.

Définition 5 : On appelle barycentre des points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n), le point G défini par :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$$

On peut aussi utiliser la notation avec le signe somme (Σ) :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

4.2 Associativité

Théorème 5 : La notion d'associativité se généralise aussi. Pour trouver le barycentre de n points, on peut remplacer p points, pris parmi les n points par leur barycentre H (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.

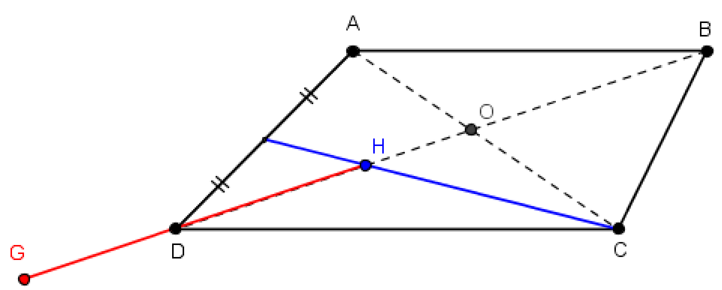
Application : $ABCD$ est un parallélogramme. Déterminer et placer le barycentre des points $(A, 2)$, $(B, -3)$, $(C, 2)$ et $(D, 2)$.

Comme les points A, C et D ont le même coefficient, on introduit le point H le barycentre de $(A, 2)$, $(C, 2)$ et $(D, 2)$. H est alors le centre de gravité du triangle ACD (intersection des médianes).

D'après le théorème d'associativité G est alors le barycentre des points $(H, 6)$ et $(B, -3)$, on a alors :

$$\overrightarrow{HG} = \frac{-3}{6-3} \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HB}$$

On obtient la figure suivante :



4.3 Réduction

Théorème 6 : Formule de réduction et coordonnées de G. Si G est le barycentre des points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2), …, (A_n, α_n) et si M est un point du plan, on a les formules suivantes :

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}$$

ou avec le signe somme :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{MG}$$

et

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum \alpha_i} (\alpha_1 \overrightarrow{0A_1} + \alpha_2 \overrightarrow{0A_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{0A_n})$$

ou

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{0A_i}$$

Application : $ABCD$ est un rectangle. Déterminer et tracer l'ensemble Γ, des points M tels que :

$$||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|| = ||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}||$$

On cherche à réduire les deux termes de l'égalité. Pour le terme de gauche, on pose G l'isobarycentre des points A, B, C et D. D'après la formule de réduction, on a alors :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

Pour le terme de droite, on s'apreçoit que la somme des coefficients est nulle, on ne peut donc introduire un barycentre. On la réduit alors en utilisant le relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Comme $ABCD$ est un rectangle alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, donc

$$= -2\overrightarrow{AB}$$

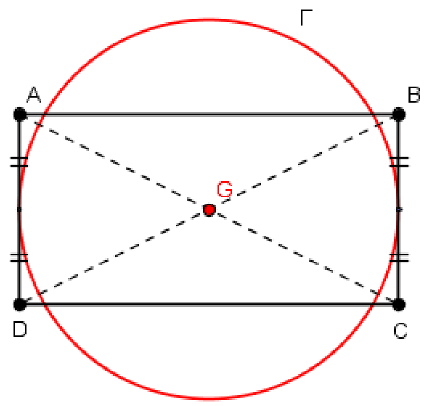
La relation devient donc :

$$||4\overrightarrow{MG}|| = ||-2\overrightarrow{AB}||$$

$$MG = \frac{1}{2} AB$$

L'ensemble Γ est donc le cercle de centre G est de rayon $\frac{1}{2}AB$

Comme G est l'isobarycentre des points A, B, C et D, et comme $ABCD$ est un rectangle, on vérifie aisement que G se situe au centre du rectangle. Comme $\frac{1}{2}AB$ représente la moitié du côté AB, le cercle Γ passe par les milieux des côtés BC et AD. On obtient donc :



5 Centre d'inertie d'une plaque homogène

Une plaque homogène consiste en une surface d'épaisseur négligeable dont la masse est également répartie. Le centre d'inertie représente le centre des masses de la plaque.

5.1 Principes utilisés par les physiciens

1) **Exemples de base**

   Le centre d'inertie de n masses ponctuelles est le barycentre des n points affectés de leur masse. Le centre d'inertie d'une tige est le milieu de cette tige.

   Le centre d'inertie d'une plaque triangulaire est le centre de gravité du triangle.

2) **Éléments de symétrie**

   Si la plaque admet un centre de symétrie I, alors le centre d'inertie est en I

   Si la plaque admet un axe de symétrie (Δ), alors son centre d'inertie est sur (Δ).

3) **Juxtaposition**

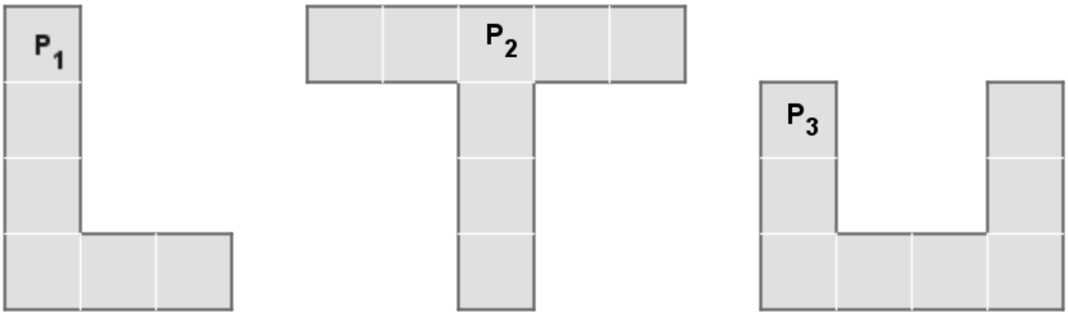
   Le centre d'inertie I de la plaque, réunion des plaques P_1 et P_2, de centres d'inertie et d'aires respectifs I_1, a_1 et I_2, a_2, est le barycentre des points I_1 et I_2 affectés des coefficients respectifs a_1 et a_2.

   Les aires a_1 et a_2 peuvent être prises comme coefficients puisque, pour des plaques homogènes, les masses sont proportionnelles aux aires.

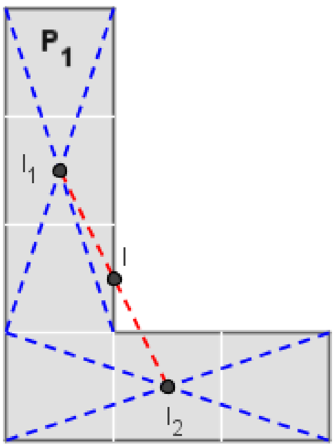
5.2 Application

5.2.1 Exercice 1

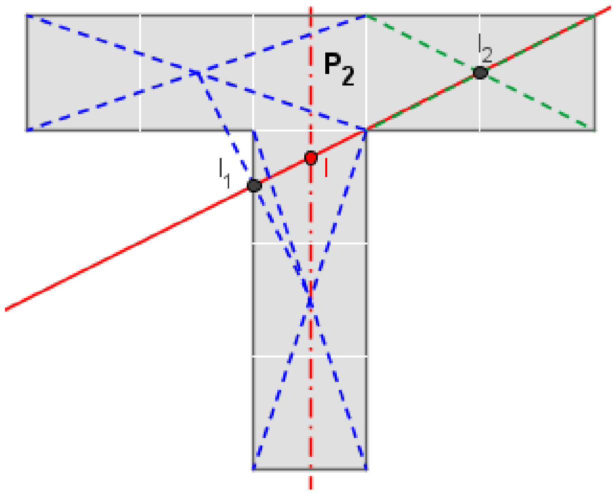
Pour chacune des plaques homogènes suivantes, construire le centre d'inertie à la règle et au compas. (Les carrés sont identiques).



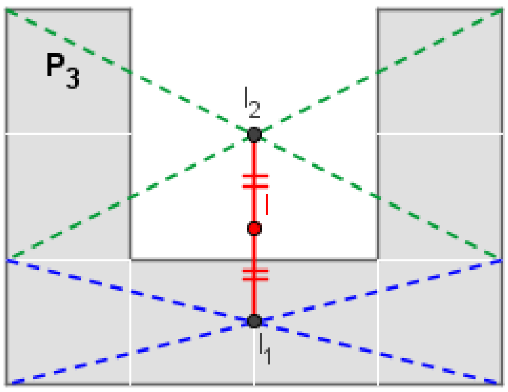
1) Pour la plaque P_1. On sépare cette plaque en deux rectangles composés de 3 carrés. Les centres d'inertie I_1 et I_2 se trouve au centre de chaque rectangle (centre de symétrie). Comme les aires de chaque rectangle sont égales, le centre d'inertie de l'ensemble de la plaque se trouve au milieu du segment $[I_1 I_2]$. On obtient alors :



2) Pour la plaque P_2. On sépare cette plaque en deux : un "L" retourné comme la plaque P_1 et un rectangle formé de deux carrés. On obtient alors deux centre I_1 et I_2. Le centre d'inertie I se trouve sur la droite $(I_1 I_2)$. De plus la figure admet un centre de symétrie (Δ), donc I se trouve à l'intersection des deux droites. On obtient alors :



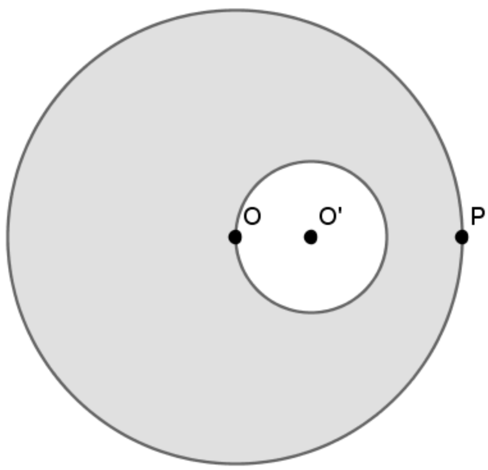
3) Pour la plaque P_3. On sépare cette plaque d'une part en un rectangle de 4 carrés et les quatre carré qui reste. Chaque sous-plaque admet un centre de symétrie, I_1 et I_2. Comme les aires sont identiques le centre d'inertie I se trouve donc au milieu de $[I_1 I_2]$. On obtient alors :



5.2.2 Exercice 2

Une rondelle a la forme d'un disque évidé suivant le schéma ci-contre pour lequel $OP = 3OO'$.

1. Trouver la position du centre d'inertie I de la rondelle évidée.
2. On note M la masse de la rondelle évidée. Quelle masse m doit-on placer en P afin que l'ensemble constitué de la rondelle et du point "massique" P ait O pour centre d'inertie ?



1. Pour déterminer le centre d'inertie, on considèrera la rondelle évidée comme la superposition d'un disque plein de coefficient $\pi \times OP^2$ et d'un disque plein associé au coefficient négatif $-\pi \times OO'^2$. I est donc le barycentre de

$(O, \pi \times OP^2)$ et $(O', -\pi \times OO'^2)$. On obtient donc :

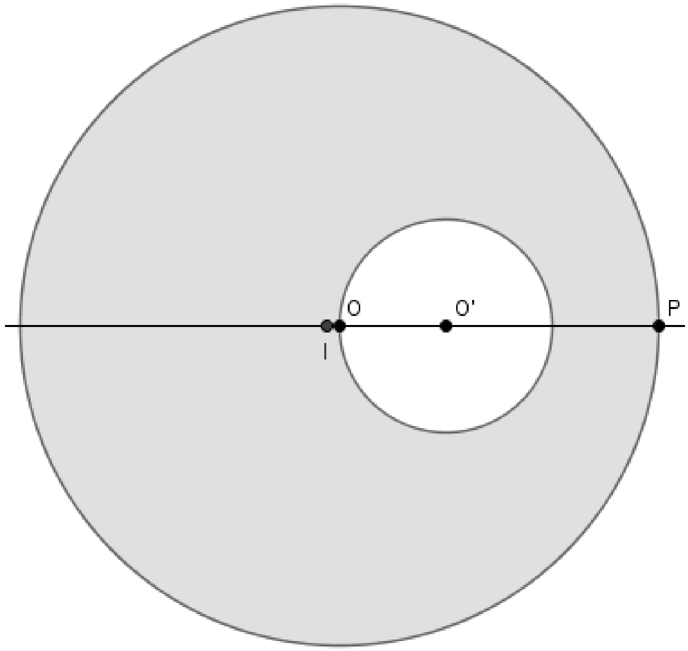
$$\overrightarrow{OI} = \frac{-\pi \times OO'^2}{\pi \times OP^2 - \pi \times OO'^2}\,\overrightarrow{OO'}$$

$$= \frac{-OO'^2}{0P^2 - OO'^2}\,\overrightarrow{OO'}$$

Comme $OP = 3OO'$, en remplaçant OP, on a :

$$= \frac{-OO'^2}{9\,OO'^2 - OO'^2}\,\overrightarrow{OO'}$$

$$= -\frac{1}{8}\,\overrightarrow{OO'}$$



2. Si O représente le centre d'inertie de la rondelle évidée et de la masse en P, alors O est le barycentre de (I, M) et (P, m). On a donc :

$$\overrightarrow{IO} = \frac{m}{M+m}\,\overrightarrow{IP}$$

Or $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{8}\,\overrightarrow{OO'}$, donc

$$\frac{1}{8}\overrightarrow{OO'} = \frac{m}{M+m}\,\overrightarrow{IP}$$

En multipliant par $8 \times (M+m)$, on a :

$$(M+m)\overrightarrow{OO'} = 8m\,\overrightarrow{IP}$$
$$(M+m)\overrightarrow{OO'} = 8m\,(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OP})$$

En remplaçant $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\overrightarrow{OO'}$

$$(M+m)\overrightarrow{OO'} = 8m\left(\frac{1}{8}\,\overrightarrow{OO'} + 3\overrightarrow{OO'}\right)$$

$$\begin{aligned} M\,\overrightarrow{OO'} + m\,\overrightarrow{OO'} &= m\,\overrightarrow{OO'} + 24m\,\overrightarrow{OO'} \\ M\,\overrightarrow{OO'} &= 24m\,\overrightarrow{OO'} \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$m = \frac{1}{24}M$$

FIN