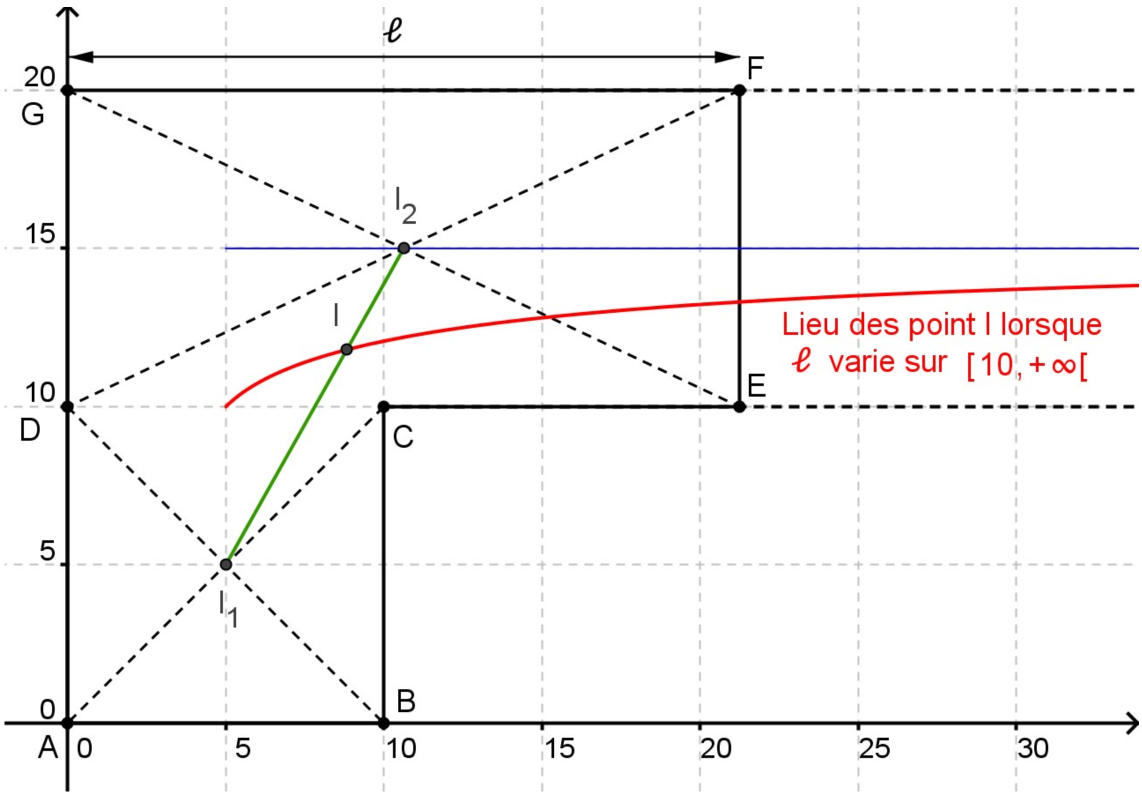
Correction Exercice 28

On a la figure suivante



Le solide est en équilibre sur sa base $[AB]$ si le centre d'inertie I de la plaque se trouve à gauche ou sur la droite (BC).

On appelle I_1 et I_2 les centres d'inertie respectifs du carré $ABCD$ et du rectangle $DEFG$.

Ils se trouvent à l'intersection de leurs diagonales.

On définit un repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont des vecteurs unitaires de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

On peut ainsi repérer $I_1(5; 5)$ et $I_2\left(\dfrac{\ell}{2}; 15\right)$.

D'après les principes physiques du centre d'inertie, le centre d'inertie I de la plaque est le barycentre des points I_1 et I_2 associés aux aires respectives $\mathscr{A}_1$ du carré $ABCD$ et $\mathscr{A}_2$ du rectangle $DEFG$.

On a alors : $\mathscr{A}_1 = 100$ et $\mathscr{A}_2 = 10\ell$

D'après la formule de réduction, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} &= \frac{\mathscr{A}_1}{\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2}\overrightarrow{AI_1} + \frac{\mathscr{A}_2}{\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2}\overrightarrow{AI_2} \\
\overrightarrow{AI} &= \frac{100}{100 + 10\ell}\overrightarrow{AI_1} + \frac{10\ell}{100 + 10\ell}\overrightarrow{AI_2} \\
\overrightarrow{AI} &= \frac{10}{10 + \ell}\overrightarrow{AI_1} + \frac{\ell}{10 + \ell}\overrightarrow{AI_2}
\end{aligned}$$

La condition d'équilibre est : $x_I \leqslant 10$

On a alors :

$$\frac{10}{10 + \ell} \times 5 + \frac{\ell}{10 + \ell} \times \frac{\ell}{2} \leqslant 10$$

En multipliant par $2(10 + \ell)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
100 + \ell^2 - 200 - 20\ell &\leqslant 0 \\
\ell^2 - 20\ell - 100 &\leqslant 0
\end{aligned}$$

On cherche alors la racine positive,

$$\Delta = 400 + 400 = \left(20\sqrt{2}\right)^2$$

On obtient alors :

$$\ell_{max} = \frac{20 + 20\sqrt{2}}{2} = 10 + 10\sqrt{2}$$