Angles orientés et coordonnées polaires

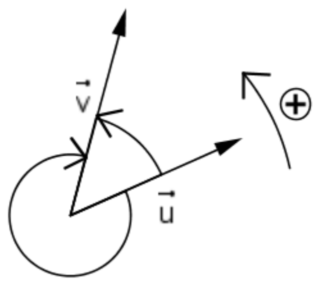
Table des matières

1 Angles orientés

1.1 Définition

Définition 1 : Un angle orienté est défini par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}, \vec{v})$. L'angle est alors orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$.

Sur la figure ci-contre, on a représenté deux angles orientés, représentant le même angle $(\vec{u}, \vec{v})$. Le premier est orienté dans le sens direct et l'autre dans le sens indirect.



1.2 Mesure d'un angle orienté

Pour mesurer un angle orienté, il faut une unité (degré ou radian) et un sens de parcours. Un même angle peut avoir des mesures différentes, comme dans la figure ci-dessus. Ces mesures sont alors équivalentes. Elles sont égales à 2π près, on dit alors qu'elles sont égales modulo 2π.

Définition 2 : On dit que les mesures (en radian) θ_1 et θ_2 d'un même angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ sont égales modulo 2π, s'il existe un entier relatif k tel que :

$$\theta_2 = \theta_1 + k \times 2\pi$$

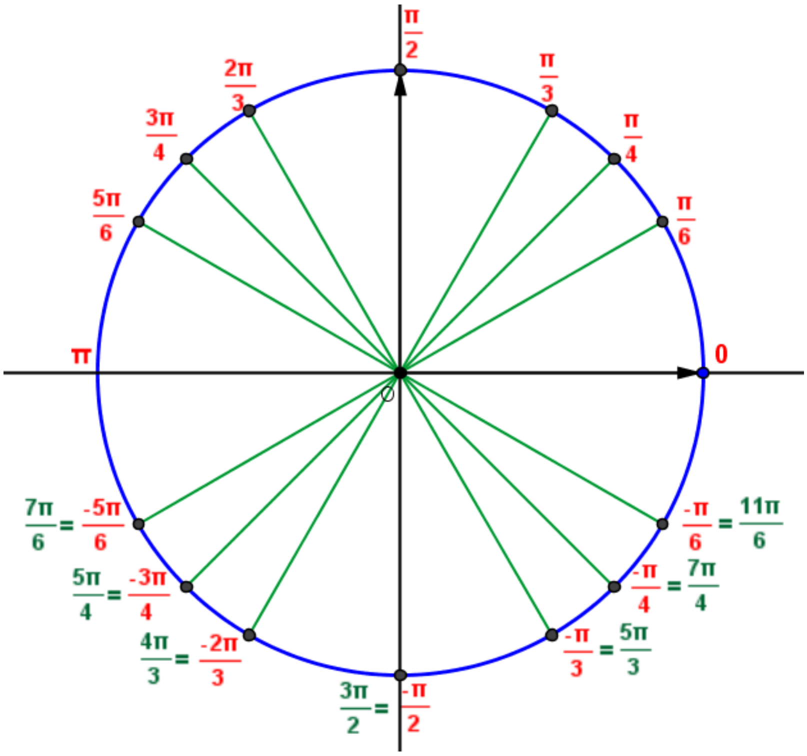
On écrira alors :

$$\theta_1 = \theta_2 \quad [2\pi]$$

Exemple : $-\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ En effet, $-\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - 1 \times 2\pi$

Définition 3 : On appelle mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, la mesure θ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.
On appelle mesure positive d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, la mesure θ avec $\theta \in [0, 2\pi[$

Exemple : Voici ci-dessous le cercle trigonométrique avec les angles remarquables exprimés en mesure principale (en rouge) et mesure positive (en vert).



1.3 Propriétés

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \pi \quad [2\pi]$$

2) **Relation de Chasles** : Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

3) Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors on a :

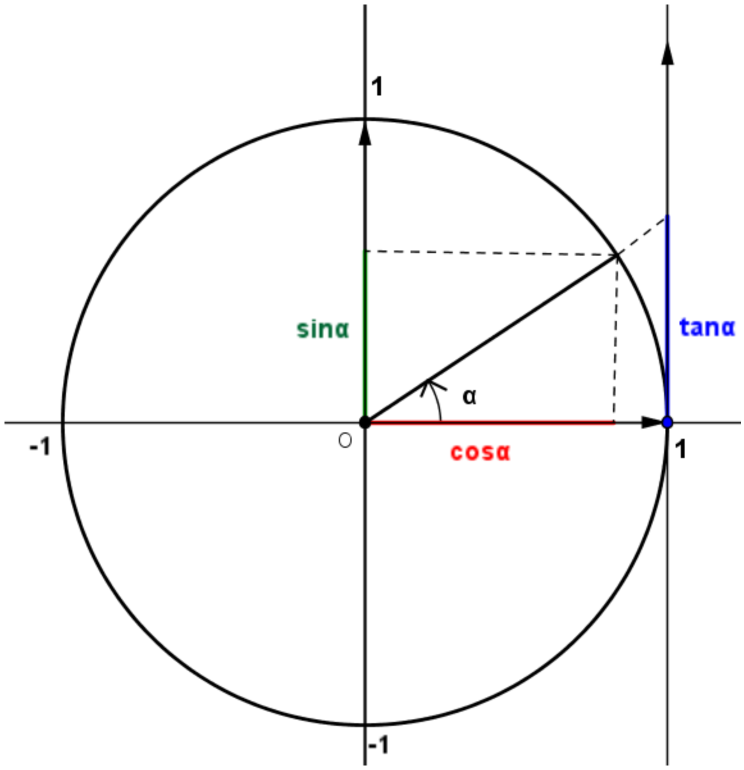
$$\begin{aligned}
(\vec{v}, \vec{u}) &= -(\vec{u}, \vec{v}) \\
(-\vec{u}, \vec{v}) &= (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \\
(\vec{u}, -\vec{v}) &= (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \\
(-\vec{u}, -\vec{v}) &= (\vec{u}, \vec{v})
\end{aligned}$$

2 Lignes trigonométriques et relations

2.1 Définitions

Définition 4 : Dans un repère orthonormal direct, α est l'angle orienté dans le cercle unité, on a alors :

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \text{projection de l'angle sur l'axe des abscisses} \\
\sin\alpha &= \text{projection de l'angle sur l'axe des ordonnées} \\
\tan\alpha &= \text{projection de l'angle sur la droite tangente au cercle} \\
&\quad\ \text{unité en } (1,0) \text{ et orientée vers le haut}
\end{aligned}$$



2.2 Tableau des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

2.3 Relations trigonométriques

2.3.1 Relations de base

On vérifie facilement avec le théorème de Pythagore la relation suivante :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

On vérifie facilement avec le théorème de Thalès que :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

A l'aide de ces deux relations, on déduit que :

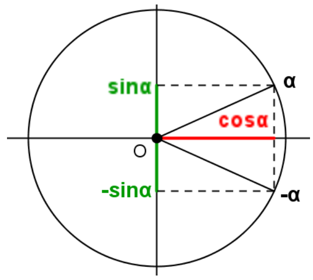
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

2.3.2 Relations entre deux angles

1) Avec l'angle opposé

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

On peut constater que les fonctions sinus et tangente sont impaires tandis que la fonction cosinus est paire



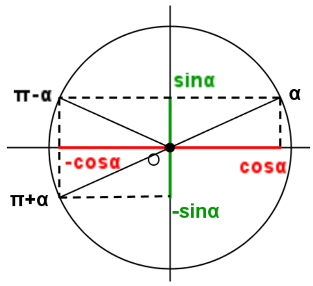
2) Avec l'angle suppléméntaire et l'opposé du suppléméntaire

Avec l'angle suppléméntaire

$$\sin(\pi-\alpha) = +\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$

Et avec son opposé

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = +\tan\alpha$$

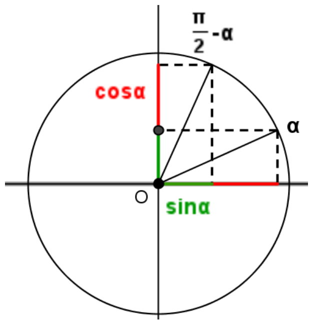


3) Avec l'angle compléméntaire et l'opposé du compléméntaire

Avec le complémentaire

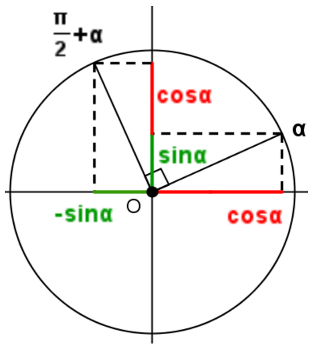
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

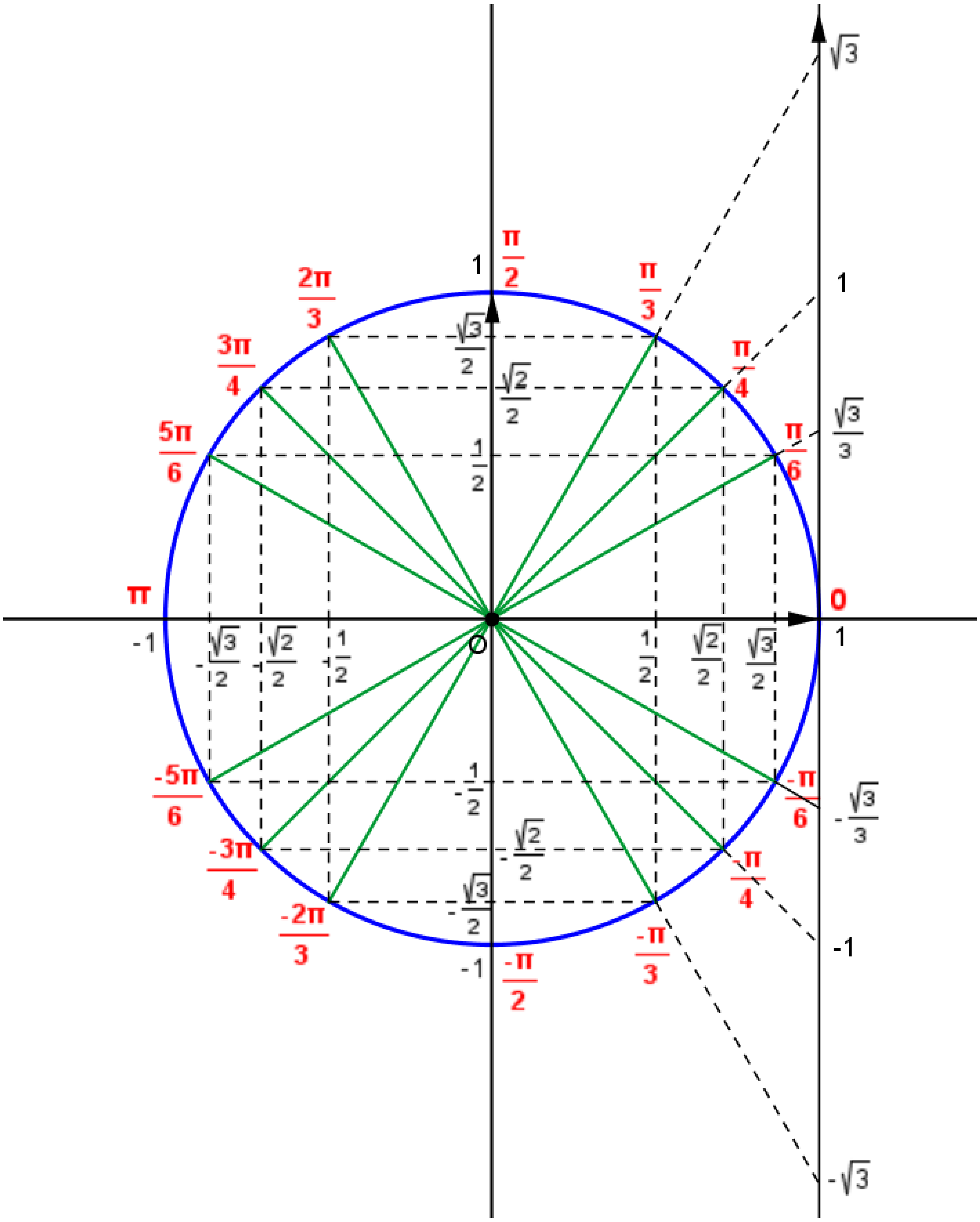


Et avec son opposé

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$$



2.4 Lignes trigonométriques dans le cercle



2.5 Équation trigonométrique

Résolution des équations dans $\mathbb{R}$: $\cos x = a$ et $\sin x = a$

Si $|a| > 1$, il n'y a pas de solution.

Si $|a| \leqslant 1$, on a les solutions pour :

1) $\cos x = a$ on résout déjà l'équation dans $[0; \pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique l'angle α dont le cosinus vaut a, c'est à dire $\alpha = \cos^{-1} a$. On trouve les autres solutions en ajoutant les multiples de 2π

$$\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\alpha + 2k\pi$$

Remarque : l'expression $x = \alpha + 2k\pi$ peut s'écrire $x = \alpha \ [2\pi]$ qui se prononce « $x = \alpha$ modulo 2π »

2) $\sin x = a$ on résout déjà l'équation dans $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique l'angle α dont le sinus vaut a, c'est à dire $\alpha = \sin^{-1} a$. On trouve les autres solutions en ajoutant les multiples de 2π

$$\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

3 Coordonnées polaires

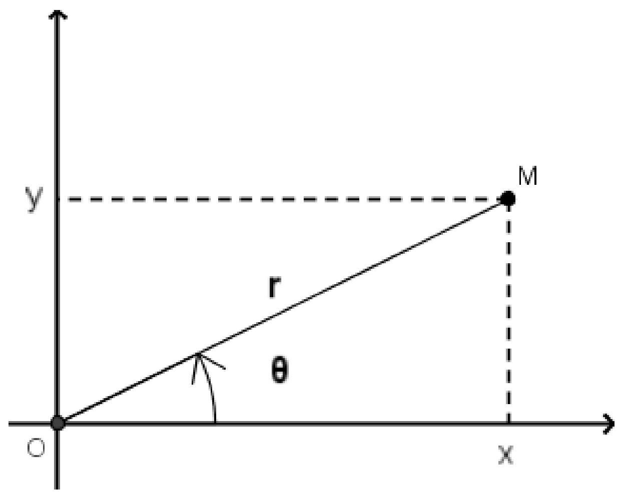
3.1 Définition

Définition 5 : Pour tout point M distinct de O, le couple (r, θ) tel que :

$$r = OM \qquad \text{et} \qquad \theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$$

est appelé coordonnées polaires polaire du point M.

Le couple $(x; y)$ est appelé coordonnées cartésiènne



3.2 Formules de passage

3.2.1 Des coordonnées polaires vers les coordonnées cartésiènnes.

Soit un point M de coordonnées polaires $(r; \theta)$ déterminons ses coordonnées cartésiènnes $(x; y)$. On a :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Exemple : Soit le point $M\left(3; \dfrac{2\pi}{3}\right)$. Déterminer ses coordonnées cartésiènnes.

On a alors :

$$\begin{cases} x = & 3\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2} \\ y = & 3\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3.2.2 Des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées polaires.

Soit un point M de coordonnées cartésiènnes $(x;y)$ déterminons ses coordonnées polaires $(x;y)$. On a :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Exemple : Soit le point $M\left(\sqrt{3};-1\right)$. Déterminer ses coordonnées polaires.

On a alors :

$$\begin{cases} r = \sqrt{3+1} = 2 \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \dfrac{-1}{2} \quad \text{d'où} \quad \theta = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$