Angles orientés et coordonnées polaires

Exercices

Exercice 1 :

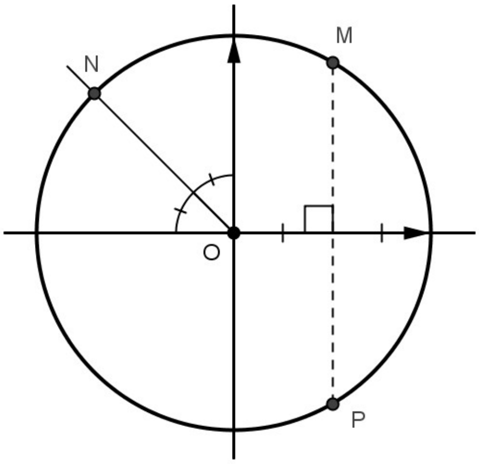
Angles orientés

a) Placer les points M, N, P et Q sur le cercle trogonométrique repérés respectivement par :

$$\frac{\pi}{3} \quad ; \quad -\frac{5\pi}{6} \quad ; \quad \frac{11\pi}{4} \quad ; \quad \frac{7\pi}{2} \quad ; \quad \frac{17\pi}{3}$$

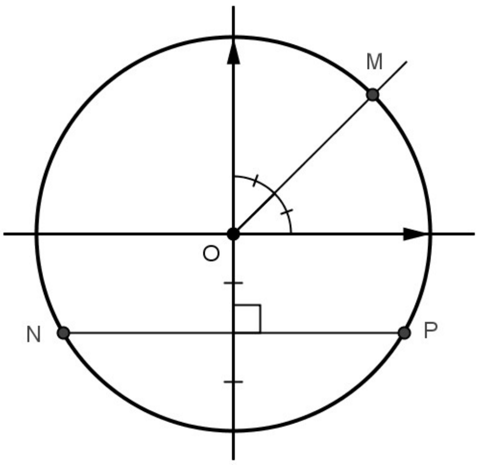
✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

b) Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur $[0; 2\pi]$ repérant les points M, N et P.



✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

c) Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur $[-\pi; \pi]$ repérant les points M, N et P.



d) Sur le cercle trigonométrique colorier l'arc décrit par l' intervalle I dans les cas suivants :

$$I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \quad ; \quad I = \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{13\pi}{6}\right] \quad ; \quad I = \left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right]$$

e) Dans chaque cas, trouver la mesure principale de l'angle orienté de mesure α donnée :

1) $\alpha = \dfrac{7\pi}{2}$

2) $\alpha = -\dfrac{4\pi}{3}$

3) $\alpha = \dfrac{35\pi}{6}$

4) $\alpha = -\dfrac{21\pi}{4}$

5) $\alpha = \dfrac{202\pi}{3}$

6) $\alpha = +18$

f) On donne la mesure de l'angle orienté suivant : $(\vec{u}, \vec{v}) = -\dfrac{\pi}{6}$.

Donner la mesure de chacun des angles orientés indiqués.

1) $(\vec{v}, 2\vec{u})$ 2) $(\vec{v}, -3\vec{u})$ 3) $(-3\vec{u}, 2\vec{v})$ 4) $(-\vec{v}, -\vec{u})$

g) ABC est un triangle rectangle en A tel que : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} = \dfrac{\pi}{5}$

Calculer la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})$

h) AIL est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AL}) = \dfrac{\pi}{3}$. Les triangles BAL et CIL sont rectangles isocèles avec $(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{LB}, \overrightarrow{LA}) = \dfrac{\pi}{2}$. Le but de l'exercice est de calculer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et d'en tirer une conséquance.

1) Faire une figure.
2) Quel théorème vous permet d'écrire :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AL}) + (\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$$

Quel est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IAC}$?

En déduire une mesure de : $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

3) Que pouvez vous dire des point A, B et C ?

Exercice II :

Lignes trigonométriques

Touver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

a) $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6}$, $\dfrac{11\pi}{6}$, $\dfrac{13\pi}{6}$

b) $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{9\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{81\pi}{4}$, $-\dfrac{108\pi}{4}$

c) $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{71\pi}{3}$, $\dfrac{97\pi}{3}$, $-\dfrac{54\pi}{3}$

Exercice III :

Coordonnées polaires et cartésiennes

Les repères $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ utilisés sont orthonormaux directs. Pour le repérage polaire, l'écriture $M(r,\theta)$ signifie que $OM = r$ et $\theta = (\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$.

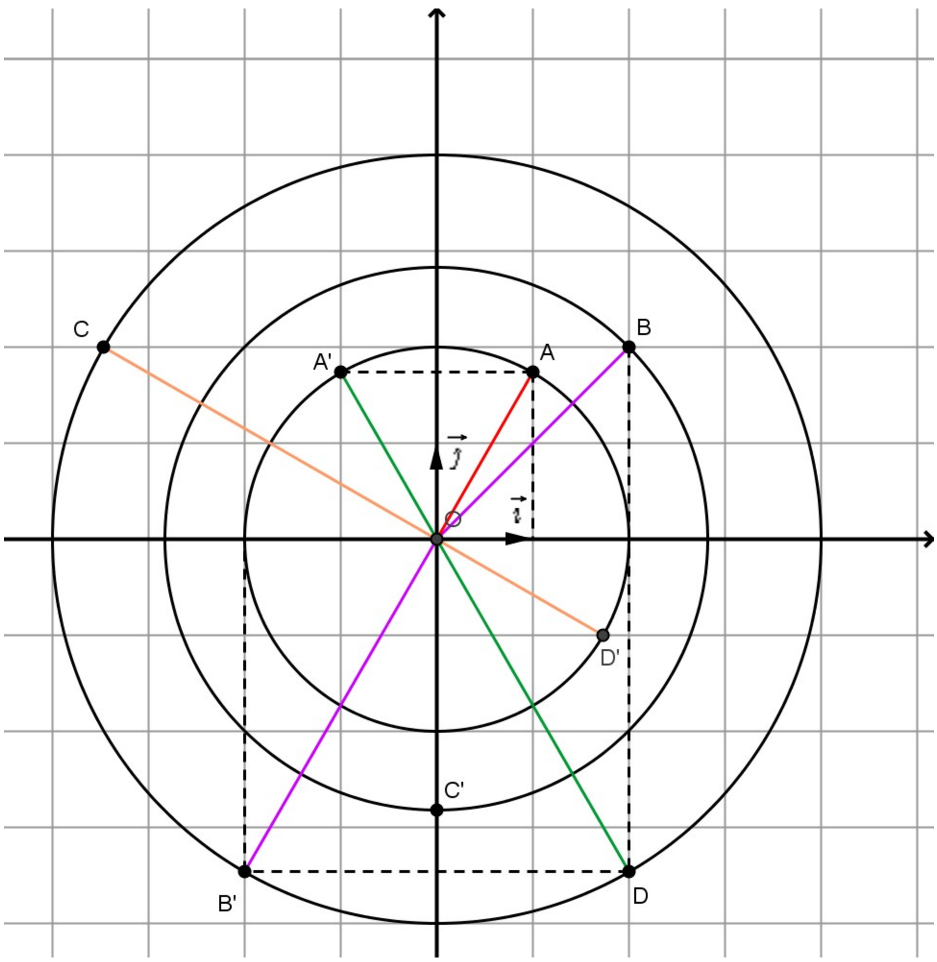
a) Placer les points suivants (à la règle et au compas) définis par leur coordonnées polaires.

$$A\,(1;0) \quad , \quad B\left(1;\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad C\,(1;\pi) \quad , \quad D\left(1;\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$E\left(2;\frac{5\pi}{6}\right) \quad , \quad F\left(2;\frac{7\pi}{6}\right) \quad , \quad G\left(3;-\frac{3\pi}{4}\right) \quad , \quad H\left(3;-\frac{\pi}{4}\right)$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

b) Indiquer les coordonnées polaires (r,θ) avec $\theta \in [0,2\pi]$, de chacun des points repérés sur la figure ci-dessous.



✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

c) Chacun des points suivants est défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y). Trouver ses coordonnées polaires (r, θ), $\theta \in]-\pi, \pi]$.

$$A(-1,1) \quad , \quad B\left(\sqrt{3},1\right) \quad , \quad C\left(-1,\sqrt{3}\right) \quad , \quad D(0,-4)$$

$$E(3,0) \quad , \quad F(-2,2) \quad , \quad G\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right) \quad , \quad H\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

d) Chacun des points suivants est défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y). Trouver ses coordonnées polaires (r, θ), $\theta \in]-\pi, \pi]$.

$$A\left(\sqrt{2},-\sqrt{6}\right) \quad , \quad B\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right) \quad , \quad C\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right) \quad , \quad D(-3,0) \quad , \quad E\left(0,-\frac{3}{4}\right)$$

$$F\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad , \quad G\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \quad , \quad H\left(-2\sqrt{3},2\right) \quad , \quad I\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2}\right)$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

e) Trouver les coordonnées cartésiennes (x, y) des points suivants définis par leurs coordonnées poalires. (On donnera les valeurs exactes des coordonnées cartésiennes).

$$A(1;0) \quad , \quad B\left(2;\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad C(3,\pi) \quad , \quad D\left(4,\frac{3\pi}{2}\right) \quad , \quad E\left(2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$F\left(2,\frac{\pi}{6}\right) \quad , \quad G\left(\frac{1}{2};\frac{5\pi}{6}\right) \quad , \quad H\left(3;\frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad I\left(\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4}\right) \quad , \quad J\left(\frac{3}{4},20\pi\right)$$

$$K\left(2,\frac{\pi}{3}\right) \quad , \quad L\left(4\frac{5\pi}{6}\right) \quad , \quad M\left(\frac{1}{4};-\frac{3\pi}{4}\right) \quad , \quad N(3;5\pi) \quad , \quad P\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$$

Exercice IV :

Trigonométrie

a) Dans chacun des cas suivants, calculer $\cos x$ ou $\sin x$ puis $\tan x$.

1) $\sin x = -\dfrac{1}{4}$; $\quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$.

2) $\cos x = \dfrac{3}{5}$; $\quad x \in \left]\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right[$.

3) $\cos x = -\dfrac{1}{3}$; $\quad x \in \left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$.

b) Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$ et les inéquations dans l'intervalle I indiqué en utilisant le cercle trigonométrique.

1) $2\sin x + 1 = 0$ et $2\sin x + 1 < 0$ dans $I = [0;2\pi]$

2) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ et $\sqrt{2}\cos x - 1 > 0$ dans $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

3) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ et $2\sin x - \sqrt{3} \leqslant 0$ dans $I = [-\pi; \pi]$.

4) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ et $2\cos x + \sqrt{3} \leqslant 0$ dans $I = [0; \pi]$.

5) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ et $2\sin x + \sqrt{2} > 0$ dans $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

6) $\tan x - 1 = 0$ et $\tan x - 1 > 0$ dans $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) Résoudre par un changement de variable, les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ et les inéquations dans l'intervalle indiqué :

1) $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ et $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 > 0$ dans $I = [0; 2\pi]$.

2) $1 - \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0$ et $1 - \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) < 0$ dans $I = [-\pi; \pi]$.

3) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}$ dans $I = [0; \pi]$.

4) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$ dans $I = [0; 2\pi]$.

d) Resoudre dans $\mathbb{R}$ ou dans l'intervalle indiqué.

1) $\cos 2x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3) $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

4) Dans $I = [0; 2\pi]$ $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{5}\right) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{3}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.