Le produit scalaire et ses applications

Table des matières

1 Définitions et propriétés

Les trois définitions suivantes sont équivalentes. On pourrait choisir comme point de départ chacune d'elle.

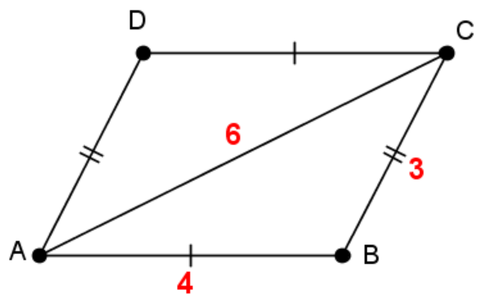
1.1 Définition initiale

Définition 1 : On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

Par convention, on écrira : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$.

Exemple : Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ pour la figure suivante :



Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2) \\
&= \frac{1}{2}(36 - 16 - 9) \\
&= \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

1.2 Définition dans un repère orthonormal

Définition 2 : Dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ est égal à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

On peut aussi utiliser la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

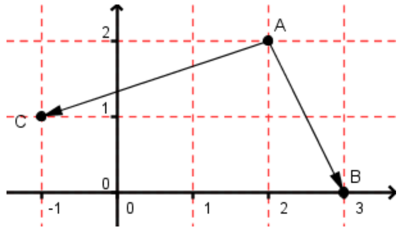
Montrons que cette définition est équivalente à la définition initiale.

On rappelle que si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$ alors : $||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u+v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[(x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)\right]\\
&= \frac{1}{2}(x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2)\\
&= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy')\\
&= xx' + yy'
\end{aligned}$$

Exemple : Déterminer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix}3-2\\0-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1-2\\1-2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}\\
&= 1\times(-3) + (-2)\times(-1)\\
&= -1
\end{aligned}$$

1.3 Définition projective

Définition 3 : Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

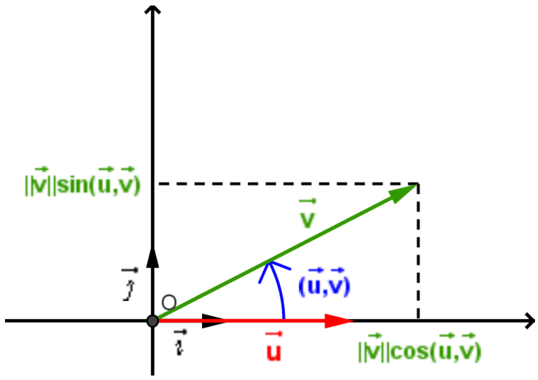
Montrons que cette définition est équivalente à la définition dans un repère orthonormal.

Prenons un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dont le premier vecteur $\vec{\imath}$ soit colinéaire et de même sens que le vecteur $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$, avec :

$$\begin{cases} x = ||\vec{u}|| \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = ||\vec{v}||\cos(\vec{u},\vec{v}) \\ y' = ||\vec{v}||\sin(\vec{u},\vec{v}) \end{cases}$$

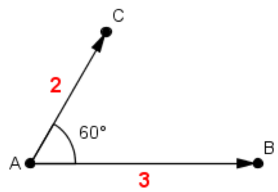
On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= xx' + yy' \\ &= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v})\end{aligned}$$



Cette définition revient à projetter le vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$.

Exemple : Déterminer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos 60° \\ &= AB \times AC \cos 60° \\ &= 3 \times 2 \times \frac{1}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

1.4 Propriétés

Propriété 1 : Nous nous en remettons au lecteur pour montrer les propriétés suivantes :

1 Le produit scalaire est commutatif :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

2 Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition de deux vecteurs :

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{m}$$

3 Le produit scalaire est distributif par rapport à la multiplication par un scalaire :

$$(a\vec{u})\cdot(b\vec{v}) = ab \times (\vec{u}\cdot\vec{v})$$

Propriété 2 : Nous nous en remettons au lecteur pour montrer les propriétés suivantes :

1 Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

2 Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

3 Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires alors :

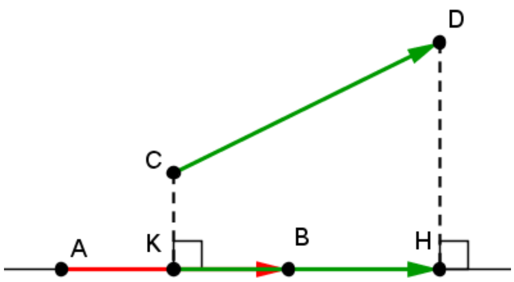
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

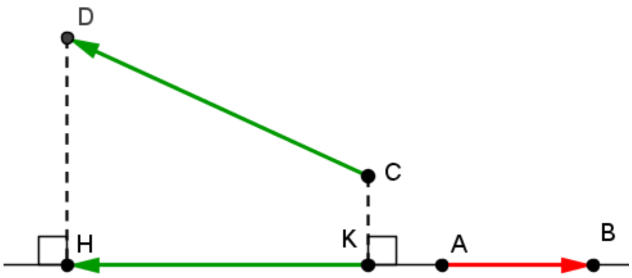
1.5 Projection

Théorème 1 : Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. On appelle K et H les projections orthogonales respectives de C et D sur la droite AB, on a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times KH \qquad \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{KH} \text{ sont de même sens.}$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times KH \qquad \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{KH} \text{ sont de sens contraires.}$$

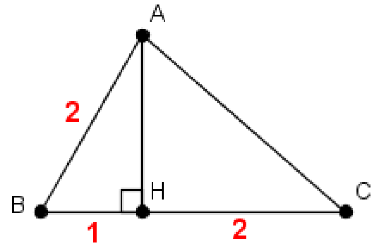
On a pour les deux cas les figures suivantes :





Exemple : En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-dessous, calculer les produits scalaires suivants :

$$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$$



$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 + \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$$

si on projette orthogonalement B sur (AH), on obtient H, donc :

$$= AB^2 + AH^2$$

en utilisant le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} &= AB^2 + (AB^2 - BH^2)\\ &= 2AB^2 - BH^2\\ &= 2\times 4 - 1\\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

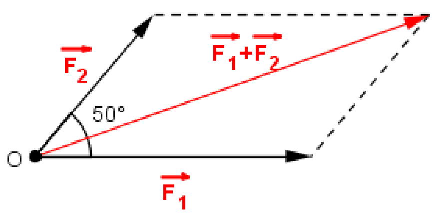
si on projette orthogonalement A sur (HC), on obtient H, donc :

$$\begin{aligned} &= AH^2 + \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HB}\\ &= (AB^2 - BH^2) - HC\times HB\\ &= 4 - 1 - 2\times 1\\ &= 1 \end{aligned}$$

1.6 Applications

1.6.1 En physique

On peut utiliser le produit scalaire pour calculer la résultante de deux forces. Soit un point O soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ qui forme un angle de 50 degré. les intensités des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont respectivement 300 N et 200 N. On a alors la figure ci-dessous :



D'après la première définition, on a :

$$\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}||^2 - F_1^2 - F_2^2\right)$$

D'après la troisième définition, on a :

$$\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} = F_1 \times F_2 \cos 50^\circ$$

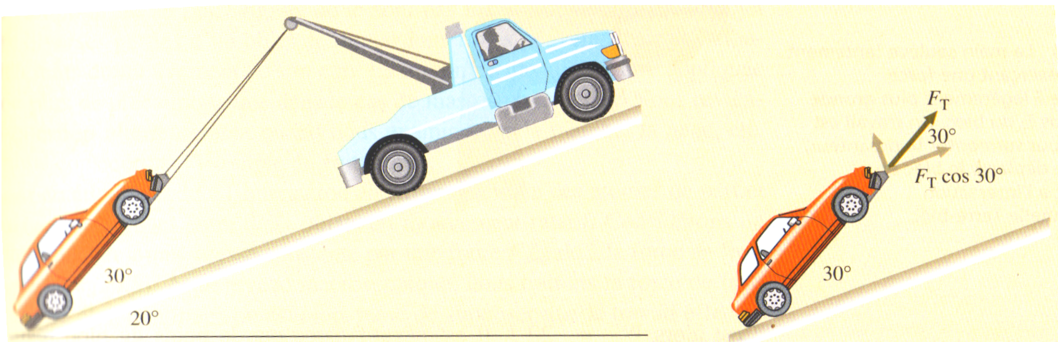
On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}||^2 - F_1^2 - F_2^2\right) &= \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} = F_1 \times F_2 \cos 50^\circ \\
||\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}||^2 &= 2F_1 \times F_2 \cos 50^\circ + F_1^2 + F_2^2 \\
||\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}|| &= \sqrt{2F_1 \times F_2 \cos 50^\circ + F_1^2 + F_2^2} \\
&= \sqrt{2 \times 300 \times 200 \cos 50^\circ + 300^2 + 200^2} \\
&\simeq 455,12 \text{ N}
\end{aligned}$$

On retrouve le produit scalaire en physique pour le travail d'un force. En effet le travail W d'une force $\vec{F}$ est égale au produit scalaire du vecteur force $\vec{F}$ par le vecteur déplacement $\vec{\ell}$.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell}$$

Une dépaneuse remorque une voiture en panne sur une côte de 20 degré. La tension du câble est constante et les deux véhicules ont une accélération constante. En supposant que le câble fait un angle de 30 degré avec le plan de la route et que la tension est de 1600 N, quel est le travail effectué par la dépaneuse sur la voiture si ele la remorque sur une distance de 0,50 km sur cette route en pente.



L'angle de la route n'a pas d'importance ici. On a alors :

$$\begin{aligned}
W &= \overrightarrow{F_T} \cdot \overrightarrow{\ell} \\
&= F_T \times \cos 30 \times 500 \\
&= 1600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 500 \\
&= 400\,000\sqrt{3} \\
&\simeq 692,82 \text{ kJ}
\end{aligned}$$

1.6.2 Lignes de niveau

Un problème de lignes de niveau consiste à déterminer un ensemble de points du plan qui vérifient une égalité. Ce nom vient des courbes que l'on trace sur une carte routière qui correspondent aux points de même altitude.

Soient A et B deux points donnés tels que $AB = 6$. On appelle $\mathscr{L}_k$ l'ensemble des point M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$$

1) Déterminer l'ensemble des point M suivant les valeurs de k.
2) Construire, si possible, $\mathscr{L}_k$, dans chacun des cas suivants.

   a) $k = -10$ b) $k = -5$ c) $k = 0$ d) $k = 7$

3) C est tel que ABC est un triangle équilatéral. Comment choisir k pout que C soit un point de $\mathscr{L}_k$?

1) Soit I le milieu du segment $[AB]$. On introduit le point I dans la relation de $\mathscr{L}_k$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= k \\
\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) &= k \\
MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} &= k \\
MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\right) \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} &= k
\end{aligned}$$

Comme $I = m[AB]$ alors $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\dfrac{AB^2}{4}$

$$\begin{aligned}
MI^2 - \frac{AB^2}{4} &= k \\
MI^2 &= k + \frac{AB^2}{4}
\end{aligned}$$

Comme $AB = 6$, on a :

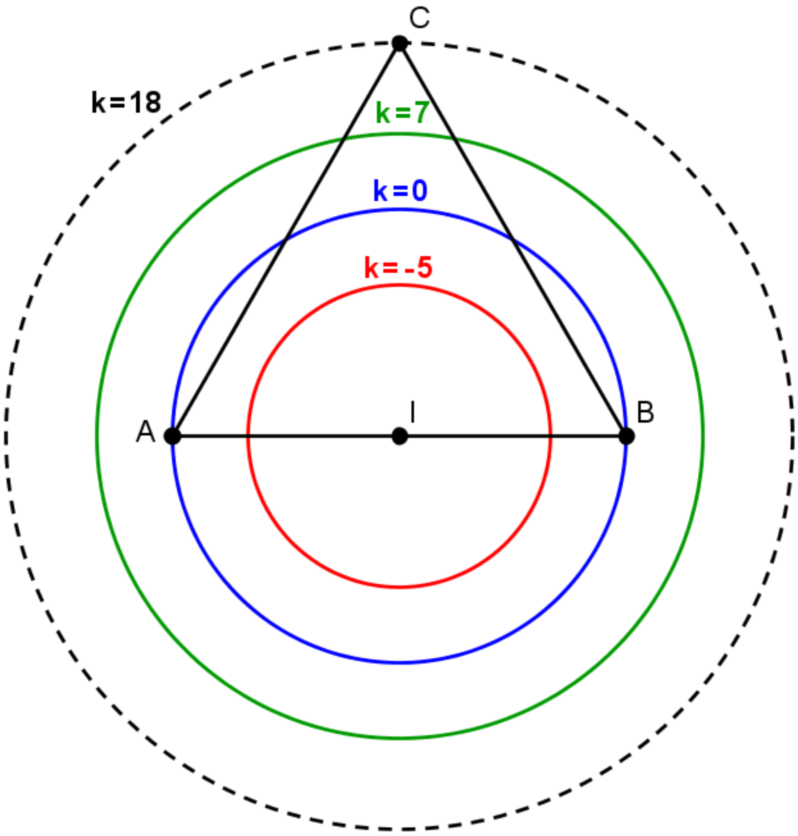
$$MI^2 = k + 9$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il faut que :

$$k + 9 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; k \geqslant -9$$

Conclusion : Si $k > -9$ l'ensemble des point M est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+9}$. Lorsque $k = -9$, l'ensemble est réduit au point I.

2) $\mathscr{L}_{-10}$ n'existe pas. Les autres cas sont représenté ci-dessous :



3) Si le triangle ABC est équilatéral, la droite (CI) représente une hauteur du triangle ABC. On sait que la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 6 est égale à :

$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

On a alors :

$$\sqrt{k+9} = 3\sqrt{3} \;\Rightarrow\; k+9 = 27 \;\Rightarrow\; k = 18$$

Conclusion : : Le point $C \in \mathscr{L}_{18}$

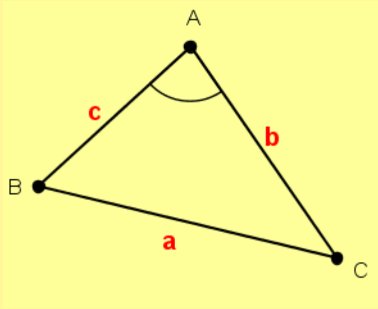
2 Relations métriques dans un triangle

2.1 Relation d'Al Kashi

Cette relation a pour but de déterminer une relation entre les trois longueurs d'un triangle soit une généralisation du théorème de Pythagore.

Théorème 2 : Dans un triangle quelconque ABC en prenant les notations indiquées sur la figure ci-dessous, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



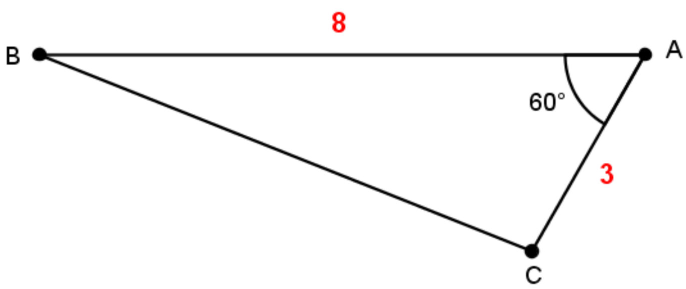
Démonstration : On part de la relation :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC}^{\,2} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^{\,2}\\
&= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^{\,2}\\
&= \overrightarrow{AC}^{\,2} - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^{\,2}\\
&= AC^{\,2} + AB^{\,2} - 2AC \times AB\cos\hat{A}
\end{aligned}$$

Ce qui devient en utilisant les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

Exemple : Soit le triangle ci-dessous. Déterminer la longueur BC et les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.



Avec nos notations nous avons alors : $b = 3 \quad c = 8$ et $\hat{A} = 60°$. Nous cherchons donc à déterminer a les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$. D'après la relation d'Al Kashi, nous avons :

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}\\
&= 3^2 + 8^2 - 2\times 3\times 8\times\frac{1}{2}\\
&= 9 + 64 - 24\\
&= 49
\end{aligned}$$

donc :

$$a = 7$$

Pour déterminer l'angle $\hat{B}$, on fait une permutation circulaire de la formule d'Al Kashi, c'est à dire :

$$\begin{aligned} a &\to b \\ b &\to c \\ c &\to a \\ \hat{A} &\to \hat{B} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 + 2ac\cos\hat{B} \\ 2ac\cos\hat{B} &= a^2 + c^2 - b^2 \\ \cos\hat{B} &= \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ &= \frac{49+64-9}{2\times 7\times 8} \\ &= \frac{104}{112} \\ &= \frac{13}{14} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\hat{B} = \arccos\left(\frac{13}{14}\right) \simeq 21,79°$$

enfin, on trouve l'angle $\hat{C}$, par complément à 180, soit :

$$\hat{C} \simeq 180 - 60 - 21,79 \simeq 98,21°$$

2.2 Relation des sinus

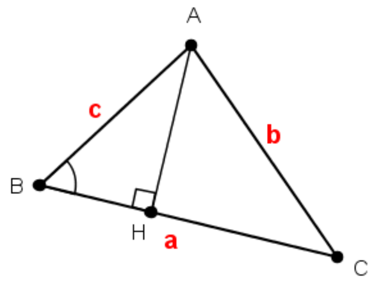
La formule d'Al Kashi est efficace si l'on connaît deux distances et un angle ou 3 distances. Par contre si l'on ne connaît qu'une distance, la relation n'est pas utilisable. On utilise alors la relations des sinus.

Théorème 3 : Dans un triangle quelconque ABC, on a les relations suivantes en gardant les mêmes notations et en appelant $\mathscr{S}$ la surface du triangle ABC :

$$\mathscr{S} = \frac{ac\sin\hat{B}}{2}$$

$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$$

Démonstration : On a la figure ci-dessous



On a alors :

$$\mathscr{S} = \frac{BC \times AH}{2}$$

Avec nos notations et comme $\sin \hat{B} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AH}{c}$

$$\mathscr{S} = \frac{ac \sin \hat{B}}{2}$$

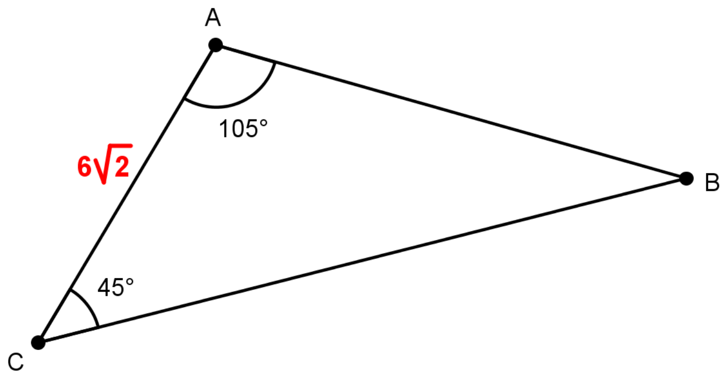
En utilisant une permutation circulaire sur la surface du triangle, on obtient :

$$\frac{ac \sin \hat{B}}{2} = \frac{ab \sin \hat{C}}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}$$

en multipliant par 2 et en divisant par abc, on a

$$\frac{ac \sin \hat{B}}{abc} = \frac{ab \sin \hat{c}}{abc} = \frac{bc \sin \hat{A}}{abc}$$
$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$$

Exemple : Soit le triangle ci-dessous. Déterminer la longueur AB et BC.



Avec nos notations nous avons alors : $b = 6\sqrt{2}$, $\hat{A} = 105°$ et $\hat{C} = 45°$. On cherche les longueurs $AB = c$ et $BC = a$

On détermine l'angle $\hat{B}$ par complément à 180 :

$$\hat{B} = 180 - 105 - 45 = 30°$$

En appliquant la relation des sinus, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \hat{B}}{b} &= \frac{\sin \hat{C}}{c} \\
c &= \frac{b \sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \\
c &= \frac{6\sqrt{2} \sin 45}{\sin 30} \\
c &= \frac{6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \\
c &= 12
\end{aligned}$$

Par permutation circulaire, on trouve a

$$\begin{aligned}
a &= \frac{c \sin \hat{A}}{\sin \hat{C}} \\
a &= \frac{12 \sin 105}{\sin 45} \\
a &= \frac{12 \sin 105}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
a &= 12\sqrt{2} \sin 105 \\
a &\simeq 16,39
\end{aligned}$$

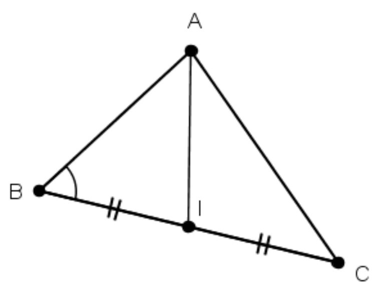
2.3 Théorème de la médiane

Ce théorème permet de connaître la longueur de la médiane à partir de trois longueurs du triangle

Théorème 4 : Dans un triangle quelconque ABC, on appelle I le milieu du segment $[BC]$, on a alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Démonstration : On a la figure ci-dessous :



$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}^2 \\ &= AI^2 + 2 \times \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2 + AI^2 + 2 \times \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} + IC^2 \\ &= 2AI^2 + 2 \times \overrightarrow{AI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

Comme I milieu de $[BC]$, on a $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ et $IB = IC = \dfrac{BC}{2}$

$$\begin{aligned} &= 2AI^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2 \\ &= 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \end{aligned}$$

3 Trigonométrie

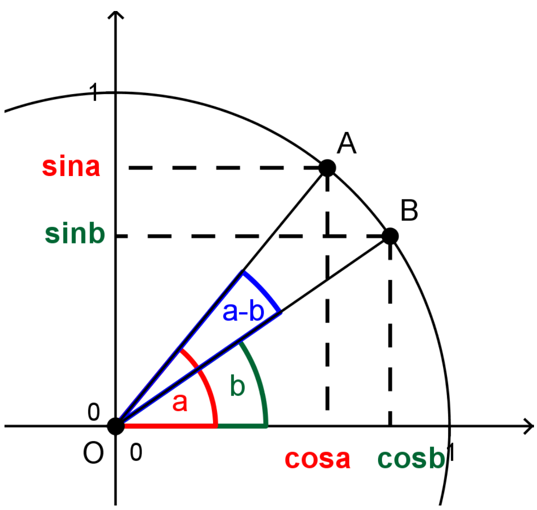
3.1 Formules d'addition

Théorème 5 : Soit a et b deux angles quelconques, on a les relations

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

Démonstration : Soit les point A et B sur le cercle unité :



Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

On en déduit donc la deuxième formule :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Pour retrouver la première, il faut remplacer dans la formule ci-dessus b par $-b$, on obtient alors :

$$\cos[a-(-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$$

comme la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Pour retrouver les formule avec le sinus, on utilise la formule qui permet de passer du cosinus au sinus, c'est à dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b \end{aligned}$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

$$= \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

On retrouve la dernière formule en remplaçant b par $-b$ et compte tenu des parités des fonctions cos et sin, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sin[a+(-b)] &= \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

Exemple : En remarquant que :

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

calculer la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

En appliquant les formules d'addition, on a :

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Remarque : Pour se souvenir des formules d'addition, on peut remarquer :

- ➪ Avec le cosinus on ne "panache pas" tandis qu'avec le sinus on "panache".
- ➪ Avec le cosinus et $a+b$, on met un "moins" entre les deux termes. Avec le sinus pas de problème de signe

3.2 Formules de duplication

Théorème 6 : Pour tout angle a, on a les relations :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ &= 2\cos^2 a - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 a\end{aligned}$$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

Démonstration : La formule sur le $\sin 2a$ est l'application directe des formules d'addition. Les formules sur le $\cos 2a$ font intervenir la relation entre $\cos^2$ et $\sin^2$. En effet :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos(a+a)\\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\end{aligned}$$

En appliquant la formule $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient les deux formules suivantes

$$\begin{aligned} &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 \\ &= (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$

Exemples :

1) Calculer $\cos 2x$ dans les deux cas suivants

   a) $\cos x = \dfrac{3}{5}$

   b) $\sin x = -\dfrac{1}{3}$

   a) On ne connaît que le cosinus donc :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 \\ &= 2 \times \frac{9}{25} - 1 \\ &= \frac{18 - 25}{25} \\ &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

   b) On ne connaît que le sinus donc :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 1 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{9 - 2}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

2) a est un réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\cos a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

   a) Calculer $\cos 2a$.

   b) À quel intervalle appartient $2a$. Déduire alors a.

a) On ne connaît que le cosinus donc :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2\\ &= 2 \times \frac{2+\sqrt{3}}{4} - 1\\ &= \frac{4+2\sqrt{3}-4}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

b) Comme $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $2a \in [0;\pi]$, on en déduit donc :

$$2a = \frac{\pi}{6} \quad \text{et donc} \quad a = \frac{\pi}{12}$$

3.3 Formules de linéarisation

Théorème 7 : Pour tout angle a on a les relations :

$$\begin{aligned}\cos^2 a &= \frac{1+\cos 2a}{2}\\ \sin^2 a &= \frac{1-\cos 2a}{2}\end{aligned}$$

Démonstration : Ces formules se déduisent directement des formules de duplication avec le $\cos 2a$. En effet :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \;\Rightarrow\; 2\cos^2 a = 1+\cos 2a \;\Rightarrow\; \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \;\Rightarrow\; 2\sin^2 a = 1-\cos 2a \;\Rightarrow\; \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Exemple : Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.
On a :

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}\\ &= \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\\ &= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Comme $\cos\dfrac{\pi}{8} > 0$, on a

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} \\
&= \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} \\
&= \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Comme $\sin\dfrac{\pi}{8} > 0$, on a

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$