Probabilité

Table des matières

1 Loi de probabilité

1.1 Conditions préalables

Il s'agit dans ce chapitre de construire une structure mathématique qui permette de repérer des situations identiques et d'avoir un méthode rigoureuse dans un domaine où notre intuition nous conduit souvent à la solution sans vraiment avoir conscience de notre démarche.

Dans tout calcul de probabilité, il faut :

Une expérience aléatoire : il s'agit d'un protocole bien précis (règle d'un jeu) dont on ne peut prévoir l'issue.

Exemples :
- ➪ Lancer un dé sur une piste de jeu.
- ➪ Lancer une pièce de monnaie
- ➪ Tirer une carte à jouer.
- ➪ Cocher les 6 numéros d'une grille de Loto qui en comporte 49.
- ➪ etc ...

Repérer toutes les issues possibles de l'expérience : il s'agit d'un dénombrement des issues possibles d'une expérience.

Exemples :
- ➪ Il y a 6 issues possibles pour un dé : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- ➪ Il y a deux issues possibles pour une pièce de monnaie : face ou pile : $\{F; P\}$
- ➪ Dans un jeu de 32 cartes il y a 32 issues possibles
- ➪ Pour une grille de Loto, il est nécessaire d'avoir une méthode afin de compter les issues. Cette partie des mathématique s'appelle le dénombrement. Pour information, il y a 13 983 816
- ➪ etc ...

Déterminer ce que l'on souhaite comme issues.

Exemples
- ➪ Obtenir un nombre pair avec un dé
- ➪ Obtenir face avec une pièce
- ➪ Obtenir un coeur avec un jeu de carte
- ➪ Obtenir 5 bons numéros sur une grille de Loto
- ➪ etc ...

1.2 Définitions

Définition 1 : On appelle univers d'une expérience aléatoire, l'ensemble de toutes les issues de cette expérience. On appelle habituellement cette ensemble : Ω.
Si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont les issues de cette expérience, on a alors :

$$\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

Exemples :

- L'univers d'un dé : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
- L'univers d'une pièce : $\Omega = \{F;P\}$
- Parfois nommer toutes les issues est trop long comme l'univers d'un jeu de 32 cartes ou d'une grille de Loto. On se contente alors de compter les éléments de cet ensemble Ω

Définition 2 : On appelle cardinal d'un ensemble fini Ω, le nombre d'élément qui le compose. On le note $Card(\Omega)$
Si $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont les issues de cette expérience, on a alors :

$$Card(\Omega) = n$$

Exemples :

- L'univers Ω d'un jeu de 32 cartes : $Card(\Omega) = 32$
- L'univers Ω d'une grille de Loto : $Card(\Omega) = 13\,983\,816$

Définition 3 : On appelle probabilité d'une issue e_i, noté $p(e_i)$ le nombre compris entre 0 et 1 tel que :

$$p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$$

Définir la loi de probabilité d'une expérience, c'est déteminer les probabilités de tous les éléments de l'ensemble Ω.

Exemples :

- Dans un urne qui contient 10 boules indicernables au toucher, 3 vertes (V), 3 bleues (B) et 4 jaunes (J), on tire une boule au hasard et on note sa couleur. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience.

  L'univers de cette expérience est $\Omega = \{V, R, J\}$. Pour déterminer la loi probabilité de cette expérience, il faut calculer les probabilités suivantes :

$$p(V) = \frac{3}{10} = 0,3$$
$$p(B) = \frac{3}{10} = 0,3$$
$$p(J) = \frac{4}{10} = 0,4$$

  On regroupe ces résultats dans un tableau.

e_i	V	R	J
$p(e_i)$	$0,3$	$0,3$	$0,4$

- On a lancé 1000 fois un dé pipé. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

numéro sorti	1	2	3	4	5	6
nombre de sorties	82	120	153	207	265	

Etablir la loi de probabilité du dé pipé.

Un dé pipé est un dé non équilibré. La loi de probabilité est alors établie par des données statistiques. Sans avoir de certitude sur les probabilités exacte, vu le grand nombre de lancés (1000), on peut suposer que le nombre d'apparition d'une face détermine sa probabilité.
L'ensemble univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les probabilités d'apparition des faces 1 à 5 est :

$$p(1) = \frac{82}{1000} = 0,082$$
$$p(2) = \frac{120}{1000} = 0,12$$
$$p(3) = \frac{153}{1000} = 0,153$$
$$p(4) = \frac{207}{1000} = 0,207$$
$$p(5) = \frac{265}{1000} = 0,265$$

Pour déterminer la probabilité est la face 6 :

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$$
$$\begin{aligned} p(6) &= 1 - p(1) - p(2) - p(3) - p(4) - p(5) \\ &= 1 - 0,082 - 0,12 - 0,153 - 0,207 - 0,265 \\ &= 0,173 \end{aligned}$$

On peut alors remplir le tableau suivant :

e_i	1	2	3	4	5	6
$p(e_i)$	0,082	0,12	0,153	0,207	0,265	0,173

1.3 Loi équirépartie

Définition 4 : Lorsque toutes les issues ont la même probabilité d'apparition, on dit que la loi de probabité est équirépartie (ou encore que l'on se situe dans un cas d'équiprobabilité).

Si $Card(\Omega) = n$ alors on a :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad p(e_i) = \frac{1}{n}$$

Exemples :

- Dans un dé bien équilibré chaque face à la même probabilité d'apparition donc
$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$
- si une pièce est bien équilibrée chaque face à la même probabilité d'apparition donc :
$$p(F) = p(P) = \frac{1}{2}$$

2 Probabilité d'un événement

2.1 Définition

Définition 5 : On appelle évènement un sous ensemble de l'ensemble univers Ω.
Soit A un événement donné. $p(A)$, sa probabilité, est alors la somme des probabilités des issues qui le composent.

Exemples : On lance le dé pipé dont on a calculé la loi de probabilité auparavant. Calculer la probabilité de l'évènement A

A : "Obtenir un multiple de 3"

On a alors : $A = \{3, 6\}$, donc :

$$p(A) = p(3) + p(6) = 0,153 + 0,173 = 0,326$$

Cas particulier :

- ➪ Si l'ensemble A est réduit à l'ensemble vide $\varnothing$, il n'est composé d'aucune issue. On l'appelle alors l'événement impossible.

$$p(\varnothing) = 0$$

- ➪ Si l'ensemble A repésente tout l'univers Ω, il est composé de toutes les issues. On l'appelle alors l'événement certain.

$$p(\Omega) = 1$$

2.2 Événement d'une loi équirépartie

Théorème 1 : Dans une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A vérifie l'égalité suivante :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de l'événement } A}{\text{nombre d'issues total}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Exemple : On lance un dé équilibré. Quel est la probabilité de l'événement A défini par :

A : "Obtenir un multiple de 3"

On a donc : $A = \{3, 6\}$ donc $Card(A) = 2$.

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3 Opération sur les ensembles

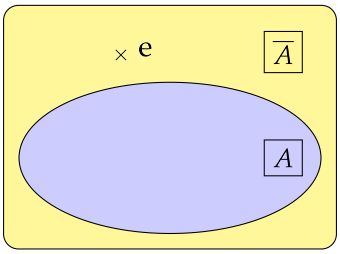
3.1 Compémentaire d'un ensemble

Définition 6 : On appelle complémentaire de l'ensemble A dans l'ensemble Ω, l'ensemble noté $\overline{A}$ composé des éléments de Ω qui ne sont pas élément de A. Le complémentaire correspond au connecteur logique NON. On a alors :

$$e \in \overline{A} \Leftrightarrow e \in \Omega \quad \text{et} \quad e \notin A$$

$\overline{A}$ se prononce "A barre"

On peut visualiser le complémentaire de A dans Ω par le diagramme de Venn suivant :



Exemples :

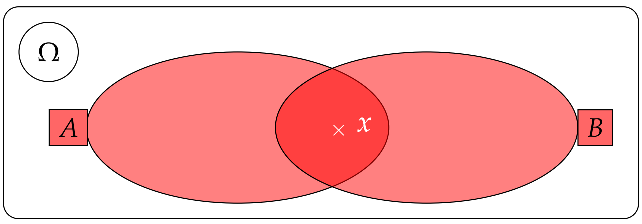
- A : faire au moins 3 avec un dé
  $\overline{A}$: faire au plus 2 avec un dé
- On tire deux cartes dans un jeu
  B : Obtenir au moins un coeur
  $\overline{B}$: Obtenir aucun coeur

3.2 Intersection de deux ensembles

Définition 7 : On appelle intersection de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble Ω, l'ensemble noté : $A \cap B$ (A inter B) constitué des éléments communs à A et B. On a donc :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

1. On peut visualiser l'intersection de deux ensembles A et B par le diagramme de Venn suivant :



2. Lorsque l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, on a alors :

$$A \subset B \;\Rightarrow\; A \cap B = A$$

3. Lorsque les ensembles A et B sont disjoints, ils ne possèdent aucun élément commun, leur intersection est donc vide, on a donc :

$$A \cap B = \varnothing \;\Leftrightarrow\; A \text{ et } B \text{ sont disjoints}$$

C'est le cas avec l'ensemble A et sont complémentaire $\overline{A}$, on a donc : $A \cap \overline{A} = \varnothing$

Exemples :

➪ On tire une carte dans un jeu
A : Obtenir un coeur
B : Obtenir une dame
$A \cap B$: Obtenir la dame de coeur

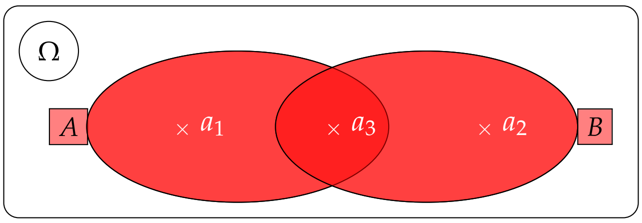
➪ Une classe de première est constituée de filles et de garçons. Les élèves sont agés de 16 à 18 ans. On interroge un élève au hasard
A : l'élève interrogé est un garçon
B : L'élève interrogé a 16 ans
$A \cap B$: L'élève interrogé est un garçon de 16 ans

3.3 Union de deux ensembles

Définition 8 : On appelle union de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble Ω, l'ensemble noté : $A \cup B$ (A union B) constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B (éventuellement aux deux, le « ou » étant non exclusif). On peut alors écrire :

$$x \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; x \in A \text{ ou } x \in B$$

1. On peut visualiser l'union de deux ensembles A et B par le diagramme de Venn suivant :



2. Lorsque l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, on a alors :

$$A \subset B \;\Rightarrow\; A \cup B = B$$

3. L'union de l'ensemble A et de son complémentaire $\overline{A}$ donne l'ensemble Ω, c'est à dire : $A \cup \overline{A} = \Omega$

Exemples :

- On tire une carte dans un jeu
  A : Obtenir un coeur
  B : Obtenir une dame
  $A \cup B$: Obtenir une dame ou un coeur

- Une classe de première est constituée de filles et de garçons. Les élèves sont agés de 16 à 18 ans. On interroge un élève au hasard
  A : l'élève interrogé est un garçon
  B : L'élève interrogé a 16 ans
  $A \cup B$: L'élève interrogé est un garçon ou un élève de 16 ans

3.4 Lois De Morgan

Règle 1 : Soit A et B deux sous-ensembles de l'ensemble Ω. On a les égalités suivantes :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Le complémentaire de l'intersection est égal à l'union des complémentaires et le complémentaire de l'union est égal à l'intersection des complémentaires

Remarque :

Le complémentaire se traduit en français par une négation. L'union et l'intersection se traduisent respectivement par les mots "ou" et "et". Ainsi la négation de la phrase :

"je vais au théatre ou au cinéma" (je peux aller au deux)

se traduit, grâce à notre règle par :

"je ne vais pas au théatre et je ne vais pas au cinéma"

que l'on peut aussi traduire par :

"je ne vais ni au théatre ni au cinéma"

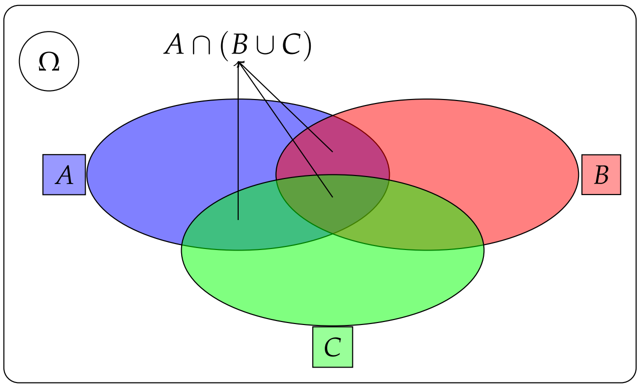
3.5 Distributivité

Règle 2 : Soit trois sous-ensembles A, B et C d'un ensemble Ω. on a alors les égalités suivantes :

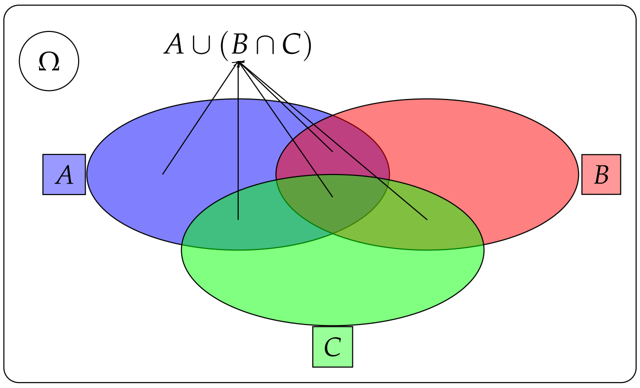
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{et} \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Remarque

On peut visualiser par un diagramme de Venn : $A \cap (B \cup C)$



Visualisation : $A \cup (B \cap C)$



3.6 Utilisation de ces opérations dans le loi de probabilité

Théorème 2 : Si A et B sont deux évènements, alors on a :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A et B sont incompatibles, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemples :

➪ A et B sont deux évènements d'une même expérience aléatoire. Calculer $P(\overline{B})$. On donne :

$$p(A) = 0,3 \quad ; \quad P(A \cup B) = 0,7 \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = 0,2$$

On calcule d'abord $P(B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$$

On calcule ensuite $P(\overline{B})$:

$$\begin{aligned} P(\overline{B}) &= 1 - P(B) \\ &= 1 - P(A \cup B) + P(A) - P(A \cap B) \\ &= 1 - 0,7 + 0,3 - 0,2 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

➪ On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes et on appelle A, B, C et D les évènements suivants :

- A : " La carte est de couleur noire "
- B : " La carte est un coeur "
- C : " La carte est un roi "
- D : " La carte est une figure "

Calculer la probabilité des évènements suivants :

$$A \cap D \,;\; B \cap C \,;\; \overline{C} \,;\; \overline{A} \cup \overline{B} \,;\; \overline{A \cup D} \,;\; A \cap \overline{C} \,;\; \overline{B \cap C} \,;\; B \cap \overline{C} \,;\; A \cup B$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

$A \cap D$: La carte est une figure noire donc :

$$P(A \cap D) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

$B \cap C$: La carte est le roi de coeur donc :

$$P(B \cap C) = \frac{1}{32}$$

$\overline{C}$: La carte n'est pas un roi. On passe par l'événement C, donc :

$$\begin{aligned} P(\overline{C}) &= 1 - P(C) \\ P(\overline{C}) &= 1 - \frac{4}{32} \\ P(\overline{C}) &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$\overline{A} \cup \overline{B}$: la carte est de couleur rouge ou n'est pas un coeur (soit tout le jeu) ce que l'on vérifie par :

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= 1 - P(A) + 1 - P(B) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= 1 \quad \text{Événement certain} \end{aligned}$$

$\overline{A \cup D} = \overline{A} \cap \overline{D}$: la carte est rouge et n'est pas une figure :

$$P(\overline{A \cup D}) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

$A \cap \overline{C}$: La carte est de couleur noire et n'est pas un roi, donc :

$$P(A \cap \overline{C}) = \frac{7}{32}$$

$\overline{B \cap C}$: La carte n'est pas le roi de coeur, donc :

$$P(\overline{B \cap C}) = 1 - P(B \cap C)$$
$$P(\overline{B \cap C}) = 1 - \frac{1}{32}$$
$$P(\overline{B \cap C}) = \frac{31}{32}$$

$B \cap \overline{C}$: La carte est un coeur et n'est pas un roi, donc :

$$P(B \cap \overline{C}) = \frac{7}{32}$$

$A \cup B$: la carte est de couleur noire ou est un coeur, donc la carte n'est pas un carreau, donc :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cap B$ est incompatible car la carte ne peut être de couleur noire et être un coeur

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 0$$
$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

4 Visualisation de données statistiques

Lorsque l'on recueille des données statistique sur une population on peut s'intéressé à deux ou trois critères de cette population. Les données sur ces critères peuvent être données soit de façon indépendante soit de façon conditionnelle. Les exemples suivants permettent d'illustrer ces différents cas.

4.1 Critères indépendants

Dans une classe de 30 élèves, 12 sont des filles, 75 % des filles osnt droitières et 1/3 des garçons osnt gauchers. Quelle est la probabilité de l'élève soit droitier ?

✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

On peut remplir le tableau à double entrée suivant :

	Garçons	Filles	Total
Gauchers	$18/3 = 6$	$12 \times 0,75 = 9$	$9 + 6 = 15$
Droitier	$18 - 6 = 12$	$12 - 9 = 3$	$12 + 3 = 15$
Total	$30 - 12 = 18$	12	30

On peut remarquer qu'il y a autant de gauchers (15) que de droitier (15), donc :

$$P(\text{droitier}) = \frac{1}{2}$$

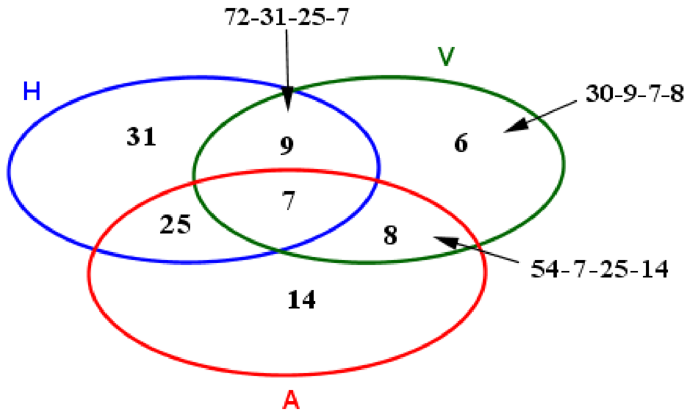
✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

Une compagnie d'assurance analyse les contrats souscrits par ses clients. Voici les résultats :

- ➪ 72 % ont souscrit au moins une assurance Habitation ;
- ➪ 54 % ont souscrit au moins une assurance Auto ;
- ➪ 30 % ont souscrit au moins une assurance Vie ;
- ➪ 7 % ont souscrit les trois assurances ;
- ➪ 25 % ont souscrit exactement une assurance Auto et une assurance Habitation ;
- ➪ 31 % ont souscrit uniquement une assurance Habitation.
- ➪ 14 % ont souscrit uniquement une assurance Auto.

(Tous les clients ont souscrit au moins un contrat parmi les trois cités ci-dessus.)

1) Représentez cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn.



2) La compagnie envoie un courrier à un assuré choisi au hasard. On appelle :
H : " l'assuré a souscrit une assurance Habitation ",
V : " l'assuré a souscrit une assurance Vie " et
A : " l'assuré a souscrit une assurance Auto ".
Identifier, sur le diagramme, les événements suivants, et calculez leur probabilité.

a) $A \cap V$; $A \cup H$; $A \cap V \cap H$.

$$P(A \cap V) = \frac{7+8}{100} = 0,15$$
$$P(A \cup H) = \frac{31+9+7+25+8+14}{100} = 0,92$$
$$P(A \cap V \cap H) = \frac{7}{100} = 0,07$$

b) $\overline{H} \cap A$; $\overline{H} \cap \overline{V}$.

$$P(\overline{H} \cap A) = \frac{14+8}{100} = 0,22$$
$$P(\overline{H} \cap \overline{V}) = \frac{14}{100} = 0,14$$

c) $\overline{A \cup H}$; $\overline{A \cup V}$.

$$P(\overline{A \cup H}) = \frac{6}{100} = 0,06$$
$$P(\overline{A \cup V}) = \frac{31}{100} = 0,31$$

3) Décrire, à l'aide des lettres A, V et H, les événements suivants.

- E : " L'assuré n'a pas souscrit d'assurance Vie, mais il a souscrit une assurance Habitation et une assurance Auto ".

$$E = \overline{V} \cap H \cap A$$

- F : " L'assuré a souscrit uniquement une assurance Auto ".

$$F = \overline{H \cup V}$$

- G : " L'assuré a souscrit exactement une assurance Auto et une assurance Habitation".

$$G = E$$

4.2 Critères conditionnels

Le sang humain est classé en quatre groupes distincts A, B, AB et O. Quel que soit le groupe, le sang, soit possède un facteur Rhésus (on note alors $Rh+$), soit ne possède pas ce facteur (on note alors $Rh-$).

Parmi une population P, les groupes sont ainsi répartis

A : 40% B : 10% AB : 5% 0 : 45%.

Le tableau ci-dessous donne la répartition de facteur Rhésus pour chacun des groupes.

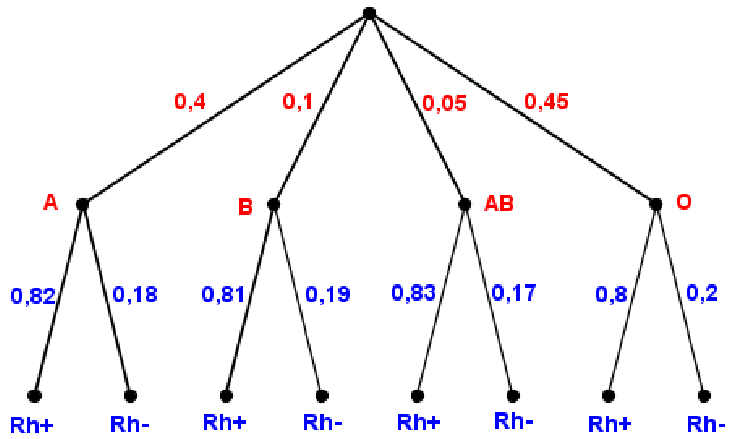
	A	B	AB	O
$Rh+$	82%	81%	83%	80%
$Rh-$	18%	19%	17%	20%

Comme les données du Rhésus sont donnés en fonction de chaque groupe sanguin, on peut visualiser ces données par un arbre pondéré où le coefficient correspondant au pourcentage donné. On a alors l'arbre suivant :

On peut par exemple écrire :

$P_A(Rh+) = 0,82$: probabilité d'avoir un facteur Rhésus positif sachant que la personne est du groupe A

Lorsque l'on suit un chemin sur l'arbre, on multiplie les coefficient (pourcentage de pourcentage)



Un individu du groupe O de Rhésus négatif est dit donneur universel. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population P

1. soit un donneur universel ?

$$P(O^-) = P(O) \times P_O(Rh-) = 0,45 \times 0,2 = 0,09$$

2. ait un Rhésus négatif ?

$$\begin{aligned} P(Rh-) &= P(A) \times P_A(Rh-) + P(B) \times P_B(Rh-) + P(AB) \times P_{AB}(Rh-) + P(O) \times P_O(Rh-) \\ &= 0,4 \times 0,18 + 0,1 \times 0,19 + 0,05 \times 0,17 + 0,45 \times 0,2 \\ &= 0,1895 \end{aligned}$$

5 Plusieurs sortes de tirages

Comme nous l'avons vu, dans une loi équirépartie, il est nécessaire de dénombrer les cas favorables et les cas possibles. On est conduit à trouver une procédure pour dénombrer ces cas. Une procédure procédure très efficace, consiste à assimiler l'expérience à un des tirages suivants :

- Tirage simultané
- Tirages successifs sans remises
- Tirages successifs avec remise

Analysons ces différents cas de figures par des exemples.

5.1 Tirage simultané

Un groupe de cinq personnes est constitué de deux femmes, désignées par f_1 et f_2, et de trois hommes, désignés par h_1, h_2 et h_3.
Chacun donne sa carte de visite et on place les cinq cartes dans une urne. On effectue alors un tirage simultané de deux cartes.

1. Ecrire les issues possibles.

   L'ensemble univers Ω est :

$$\Omega = \{f_1, f_2, h_1, h_2, h_3\}$$

Lorsqu'on tire deux cartes, on obtient un sous ensemble de Ω à deux éléments. Il s'agit de répertorier tous les sous ensembles à deux éléments :

➪ Sous ensemble contenant f_1

$$\{f_1, f_2\}\ ,\ \{f_1, h_1\}\ ,\ \{f_1, h_2\}\ ,\ \{f_1, h_3\}$$

➪ Sous ensemble contenant f_2, mais pas f_1

$$\{f_2, h_1\}\ ,\ \{f_2, h_2\}\ ,\ \{f_2, h_3\}$$

➪ Sous ensemble contenant h_1, mais ni f_1 ni f_2

$$\{h_1, h_2\}\ \ \{h_1, h_3\}$$

➪ Sous ensemble contenant h_2, mais ni f_1, ni f_2 et ni h_1

$$\{h_2, h_3\}$$

Il y a donc $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ tirages possibles

Remarque : Ces différents tirages possibles s'appelle des combinaisons de 2 éléments parmi 5. Nous verons en terminale que ce nombre de combinaisons se note :

$$\binom{5}{2} = 10$$

.

2. Calculer les probabilités des événements suivants :

➪ H : " le tirage donne les cartes de deux hommes "

On suppose que les cartes de visite sont indicernables au toucher ce qui se traduit par une loi équirépartie. On compte alors le nombre de sous ensembles à deux éléments qui ne contiennent que des hommes, on en dénombre 3 donc :

$$P(H) = \frac{3}{10} = 0,3$$

➪ F : " le tirage donne les cartes de deux femmes "

Il n'y a qu'un seul tirage qui contient que des femmes, donc :

$$P(F) = \frac{1}{10} = 0,1$$

➪ D : " le tirage donne les cartes de deux personnes de sexes opposés "

On dénombre 6 tirages composés d'un homme et d'une femme.

$$P(D) = \frac{6}{10} = 0,6$$

Remarque : On peut remarquer que l'événement D est le complémentaire de $H \cup F$.

$$D = \overline{H \cup F}$$

5.2 Tirages successifs avec remise

Exemple 1 :

À la course du tiercé, il y a vingt chevaux au départ. À l'arrivée, il n'y a pas d'ex-aequo.

On mise sur trois numéros.

1) Calculer la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre. (Il s'agit d'avoir les numéros des trois premiers chevaux dans l'ordre d'arrivée.)

   Pour connaitre le nombre tiercés possibles, il faut déterminer le nombre de triplets possibles avec 20 éléments. On peut assimiler un triplet à trois tirages successifs sans remise dans une urne contenant 20 boules, indicernables au toucher. Une fois une boule tiré, on ne la remet pas dans l'urne.

   On a alors 20 boules pour le premier tirage, 19 pour le second et 18 pour le troisième, on a donc :

   $$20 \times 19 \times 18 = 6\,840 \text{ tiercés possibles}$$

   Il y a bien sur qu'un seul tiercé dans l'ordre possible. La probabilité d'avoir le tiercé dans l'ordre est donc :

   $$P(\text{ordre}) = \frac{1}{6840} \simeq 0{,}000\,146 \quad \text{soit} \quad 0,0146\,\%$$

   Remarque : Le nombre triplets possibles, s'appelle un arrangement de 3 éléments parmi 20, on le note : A^5_{20}.

2) Calculer la probabilité de gagner le tiercé dans le désordre. (Il s'agit d'avoir les numéros des trois premiers, mais pas dans l'ordre d'arrivée.)

   Il s'agit ici de dénombrer toutes les permutations posssible d'un triplets (a, b, c). Permuter signifie changer de place. On fait la liste des triplets que l'on peut écrire avec les lettres a, b et c.

   $$(a, b, c),\ (a, c, b),\ (b, a, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b),\ (c, b, a)$$

   Sur le 6 triplets possibles, on enlève celui qui donne le tiercé dans l'ordre, on a donc la probabilité d'avoir le tiercé dans l'ordre :

   $$P(\text{désordre}) = \frac{5}{6840} = \frac{1}{1368} \simeq 0{,}000\,730 \quad \text{soit} \quad 0,0730\,\%$$

Exemple 2 :

On désigne par Ω l'ensemble des anagrammes du mot MARIE (Exemple : AMRIE). Un anagramme n'est pas nécessairement un nom du dictionnaire.

1. Déterminer le nombre d'anagrammes possible avec le mot MARIE.

   On peut supposer que le nombre d'anagrammes peut être assimilé à 5 tirages successifs sans remises. Il s'agit donc de trouver toutes les permutations du mot MARIE.
   Comme chaque lettre sont différentes, il a 5 choix possibles pour la première, 4 pour la seconde, 3 pour la troisième, 2 pour la quatrième et 1 pour la dernière. On a donc :

   $$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad \text{anagrammes possibles}$$

2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

   ➪ A : " on obitient le mot AIMER "

   $$P(A) = \frac{1}{120}$$

   ➪ B : " le mot commence par une voyelle "

   Il y trois voyelle dans le mot MARIE, donc on a 3 choix pour la première lettre, le choix des autres lettres étant indiférent.

   $$P(B) = \frac{3}{5}$$

   ➪ C : " le mot se termine par une consonne "

   Le choix des 4 première lettres étant indifférent, comme il y a deux consonnes, on a donc :

   $$P(C) = \frac{2}{5}$$

   ➪ D : " le mot commence par une voyelle ou se termine par une consonne "

   On a donc $D = B \cup C$, comme on a :

   $$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

   Il nous faut déterminer la probabilité de $B \cap C$, c'est à dire que le mot commence par une voyelle et se termine par une consonne. Il y a 3 choix pour la première lettre, 2 choix pour la dernière, 3 choix pour la deuxième, 2 pour la troisième et 1 pour la quatrième, donc :

   $$P(B \cap C) = \frac{3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{3}{10}$$

   On a donc :

   $$\begin{aligned} P(B \cup C) &= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{10} \\ &= \frac{7}{10} \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

5.3 Tirages successifs avec remise

Exemple 1 :

On place au hasard trois chemises de couleurs bleue, blanche et rouge dans 4 tiroirs a, b, c, d. Chaque répartition est équiprobable.

1. Combiens y a t-il de répartition possibles ?

   On peut procéder ainsi : pour la première chemise, on tire au hasard une boule dans un urne contenant 4 boules notés a, b, c et d puis on remet la boule tiré dans l'urne et l'on procède de façon identique pour les 2 autres chemises. Il y a donc 4 choix pour chaque chemise, donc il y a :

$$4^3 = 64 \quad \text{répartitions possibles}$$

Remarque : Si l'on fait p tirages dans un urne qui contient n éléments, on a n^p tirages possibles

2. Calculer la probabilités des événements suivants :
   - ➪ M : " toutes les chemises sont dans le même tiroir "

     les chemises sont dans le tiroir a, b, c ou d donc :

     $$P(M) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

   - ➪ V : " les tiroirs b et c sont vide "

     Pour chaque chemise, nous n'avons que deux tiroirs possibles donc :

     $$P(V) = \frac{2^3}{64} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

Exemple 2 :

On lance un dééquilibré quatre fois de suite et on considère le nombre formé par les quatre numéros pris dans l'ordre de sortie. Ω désigne l'ensemble des issues possibles, muni de la loi équirépartie.

1. Calculer le nombre d'issues possibles.

   Pour chaque lancement, il y a 6 choix possibles, donc il y a :

   $$6^4 = 1\,296 \quad \text{issues possibles}$$

2. Calculer les probabilités des événements suivants
   - ➪ A : " le nombre est 4 211 "

     $$P(A) = \frac{1}{1\,296}$$

   - ➪ B " le nombre est formé de 4 chiffres distincts "

     Pour le premier chiffre, il y a 6 choix possibles, pour le second 5, le troisième 4 et le dernier 3. On a donc :

     $$P(B) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1\,296} = \frac{360}{1\,296} = \frac{5}{18}$$

   - ➪ C : " le nombre est pair "

     Pour que le nombre soit pair, il peut se terminer par 2,4 ou 6. Comme le choix des trois premiers chiffres est indifférent, on a :

     $$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- D : " le nombre est multiple de 101 "

  Tout multiple de 101 est de la forme $k \times 101$. Comme le nombre le plus grand que l'on peut formé est 6 666, donc $k < 60$. En transcrivant le nombre dans la numération en base 10, on a :

  $$k \times 101 = k \times 100 + k$$

  Le nombre est formé de k unités et k centaines, il est donc de la forme $\overline{abab}$.
  donc k est un nombre de deux chiffres formé à l'aide de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, il y a 6^2 choix possibles.

  $$P(D) = \frac{6^2}{1\,296} = \frac{1}{36}$$

6 Variable aléatoire

6.1 Définition

Définition 9 : Ω est l'univers d'une expérience aléatoire. Toute fonction définie sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$, est appelée une variable aléatoire.

$$\begin{aligned} X\ :\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

On note alors $P(X = x_i)$ la probabilité d'avoir la valeur x_i, c'est à dire que $P(A) = P(X = x_i)$

Remarque : Cette dénomination est un abus de langage. D'abord X n'est pas un variable, mais une fonction, définie sur l'univers. Ensuite cette fonction n'a rien d'aléatoire ; elle est parfaitement déterminée.

Exemple : On lance trois pièces de monnaie identiques. On numérote les pièce 1, 2 et 3. Pour chaque pièce, il y a deux éventualités, soit elle tombe sur face soit sur pile. Si on relève dans l'ordre les résultats des pièces 1, 2 et 3, on obtient $2^3 = 8$ issues possibles.

Si on associe l'apparition d'une pièce sur face avec un gain de 2 € et l'apparition d'une pièce sur pile avec une perte de 1 €, on crée une variable aléatoire X qui à une issue possible associe un gain. cette variable aléatoire peut donc prendre comme valeur :

- 6 € si les trois pièces tombent sur face
- 3 € si deux pièces tombent sur face et une sur pile
- 0 € si une pièce tombe sur face et deux sur pile
- -3 € si les trois pièces tombent sur pile

6.2 Loi de probabilité, espérance et variance

Définition 10 : On peut définir une nouvelle loi de probabilité de X qui à chaque x_i associe le nombre $P(X = x_i)$

Exemple : Reprenons l'exemple ci-dessus et calculons la probabilité pour chaque gain possible.

➪ Un gain de 6 €. Il n'y a qu'une seule possibilité : (F, F, F).

$$P(X = 6) = \frac{1}{8} = 0,125$$

➪ Un gain de 3 €. Il faut faire un fois pile. Cela peut être avec la pièce 1, 2 ou trois. Donc :

$$P(X = 3) = \frac{3}{8} = 0,375$$

➪ Un gain de 0 €. Il faut faire un fois face. Donc :

$$P(X = 0) = \frac{3}{8} = 0,375$$

➪ Un gain de -3 €. Il n'y a qu'une seule possibilité : (P, P, P).

$$P(X = -3) = \frac{1}{8} = 0,375$$

On peut résumer la loi dans un tableau.

gain x_i	6	3	0	-3
$P(X = x_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

Définition 11 : Pour toute variable aléatoire, on peut définir, les nombres suivants :

➪ L'espérance mathématique $E(X)$ (moyenne des valeurs x_i)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

➪ La variance $V(X)$ (moyenne des écarts au carré)

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E^2(X)$$

➪ L'écart type $\sigma(X)$ (racine carrée de la variance)

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple : Si l'on reprend l'exemple précédent. on a alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0,125 \times 6 + 0,375 \times 3 + 0,375 \times 0 - 0,125 \times 3 \\ &= 1,5 \end{aligned}$$

Cela veut dire qu'en moyenne un joueur gagne 1,5 €. Le jeu est donc favorable au joueur.

$$V(X) = 0,125 \times 6^2 + 0,375 \times 3^2 + 0,375 \times 0^2 - 0,125 \times 3^2 - 1,5^2$$
$$= 4,5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{4,5}$$
$$\simeq 2,12$$

La distance moyenne entre le gain d'un joueur et l'espérence est d'environ 2,12 €.

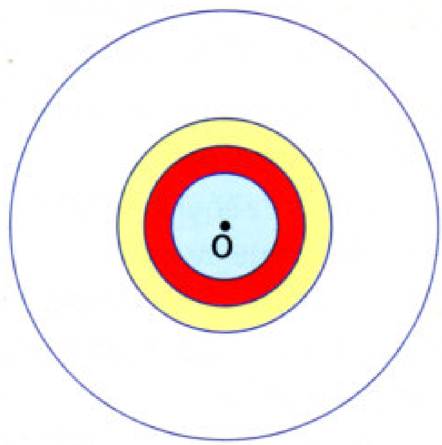
Remarque : On prend souvent comme variable aléatoire le gain pour un jeu. On peut alors remarquer que si :

$E(X) > 0$	le jeu est favorable au joueur
$E(X) = 0$	le jeu est équitable
$E(X) < 0$	le jeu est défavorable au joueur

6.3 Exemples

Exemple 1 :

Dans un cercle de rayon 40 cm et de centre O, on a tracé trois cercles concentriques de rayons 10 cm, 15 cm et 20 cm. On définit ainsi une cible dont les zones sont bleue, rouge, jaune et blanche. Un joueur de fléchette atteint toujours la cible, et on admet que la probabilité qu'il atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.



Lorsqu'il atteint la zone bleue, il gagne 20 €, lorsqu'il atteint la couronne rouge, il gagne 10 €, et pour la couleur jaune, il gagne 5 €. En revanche, si la fléchette atteint la zone blanche, il perd 2 €.

On appelle X le gain du joueur. Déterminez la loi de prot;bilité de X et son espérance mathématique. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Il faut déterminer la probabilité d'atteindre chaque zone.

$$P(X=20) = \frac{\text{Aire surface bleu}}{\text{Aire de la cible}} = \frac{\pi \times 10^2}{\pi \times 40^2} = \frac{100}{1600} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=10) = \frac{\text{Aire surface rouge}}{\text{Aire de la cible}} = \frac{\pi(15^2 - 10^2)}{\pi \times 40^2} = \frac{125}{1600} = \frac{5}{64}$$

$$P(X=5) = \frac{\text{Aire surface jaune}}{\text{Aire de la cible}} = \frac{\pi(20^2 - 15^2)}{\pi \times 40^2} = \frac{175}{1600} = \frac{7}{64}$$

$$P(X=-2) = \frac{\text{Aire surface blanche}}{\text{Aire de la cible}} = \frac{\pi(40^2 - 20^2)}{\pi \times 40^2} = \frac{1200}{1600} = \frac{3}{4}$$

On peut résumer ces résultats dans un tableau

x_i gain	20	10	5	-2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{3}{4}$

On peut alors calculer l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{100}{1600} \times 20 + \frac{125}{1600} \times 10 + \frac{175}{1600} \times 5 - \frac{1200}{1600} \times 2 \\ &= \frac{2000 + 1250 + 875 - 2400}{1600} \\ &= \frac{1725}{1600} \\ &\simeq 1,08 \end{aligned}$$

Le jeu est donc favorable au joueur car il gagne en moyenne environ 1 €.

Exemple 2 :

Une urne contient $n+8$ boules : 8 boules blanches et n noires. (n est un entier, $n \geqslant 2$)

Un joueur tire avec remise deux boules de l'urne et examine leurs couleurs. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5 €, mais pour chaque noire tirée, il perd 10 €.

On note G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur sur un tirage.

1. Quelle sont le valeur de G ?

   On peut avoir 2 boules blanches soit 10 €, 1 boule blanche et une boule noire soit -5 € ou 2 boules noires soit -20 €

$$G = \{10, -5, -20\}$$

2. Définir en fonction de n la loi de probabilité de G

$$\begin{aligned} P(G=10) &= \frac{8^2}{(n+8)^2} \\ &= \frac{64}{(n+8)^2} \end{aligned}$$

pour les boules de couleur différentes, on a le choix blanche, noire et inversement

$$\begin{aligned} P(G=-5) &= \frac{2\times 8n}{(n+8)^2} \\ &= \frac{16n}{(n+8)^2} \end{aligned}$$

$$P(G=-20) = \frac{n^2}{(n+8)^2}$$

On peut résumer la loi dans un tableau

g_i gain	10	-5	-20
$P(G=g_i)$	$\frac{64}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$

3. Calculer en fonction de n l'espérance mathématique de gain.
Existe t-il une valeur de n telle que l'espérance du gain soit nulle ?

On calcule l'espérance :

$$E(G) = \frac{64}{(n+8)^2}\times 10 - \frac{16n}{(n+8)^2}\times 5 - n^2(n+8)^2\times 20 \quad = \frac{-20n^2-80n+640}{(n+8)^2}$$

Pour que l'espérance soit nulle, il faut que :

$$\begin{aligned} -20n^2-80n+640 &= 0 \\ -n^2-4n+32 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 16+4\times 32 \\ &= 144 \\ &= 12^2 \end{aligned}$$

On ne retient que la valeur positive :

$$n = \frac{4-12}{-2} = 4$$

Le résultat semble cohérent car la boule noire fait perdre deux fois plus que la boule blanche fait gagner.

FIN