Devoir de mathématiques n°11 (DS) (12-03-2012)

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 12x + 5$.

1) En utilisant $f'(x)$, étudier le sens de variation de f.
2) En déduire les extremums locaux de la fonction f.
3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.
4) Déterminer les réels a tel que la tangente T_a au point d'abscisse a soit parallèle à la droite Δ d'équation : $y = 15x - 4$.

II) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 7}{x + 3}$

1) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R} - \{-3\}$; puis calculer $f'(x)$.
2) Étudier le sens de variation de f.

III) m étant un réel fixé, soient d et d' les droites équations respectives

$$(2m - 1)x - 4y - 9 = 0 \quad \text{et} \quad (m - 2)x - 3y + 1 = 0$$

Déterminer le réel m tel que les droites d et d' soient parallèles.

IV) Le plan est muni d'ün repère orthonormé

Soient les points A(5 ;-2), B(11 ;0) et C(-1 ;6). Soient I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AC] et K le milieu du segment [AB].

1) Faire une figure.
2) Déterminer les coordonnées des point I, J et K.
3) Déterminer une équation de la droite (AI), puis de la droite (BJ).
4) Montrer que des droites (AI) et (BJ) ont pour point commun $G\left(5; \dfrac{4}{3}\right)$.
5) Montrer que les points C, G et K sont alignés.
6) Quelle propriété sur les médianes du triangle ABC vient-on de démontrer ?
7) Soit H le point tel que : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$.
   Déterminer, par le calcul les coordonnées du point H. Que remarque-t-on ?

V) Soient ABC un triangle et le points G tel que :

$$(1) \quad 2\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{GC} = 6\overrightarrow{AC}$$

1) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
   Représenter le point G.

2) Autre méthode (en utilisant des coordonnées).

   Le plan est muni du repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$.

   a) Donner les coordonnées des points A, B et C.

   b) Déterminer les coordonnées du point G (en utilisant (1)).

VI) 1) Soient ABC un triangle et les points I, J et K tels que :

$$(1) : \quad \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad (2) : \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad (3) : \quad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$$

   a) Faire une figure.

   b) Que peut-on conjecturer au sujet des points I, C et K ?

2) Exprimer $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

3) a) En utilisant (2) et (3), montrer que : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire $\overrightarrow{IK}$, puis $9\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

4) a) Déterminer le réel k tel que : $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IC}$.

   b) Qu'en déduit-on ?