# Devoir de mathématiques n°13 (DS) (05-04-2012)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

I) 1) Soient les points A(1 ;3), B(-2 ;0) et C(3 ;0) . Déterminer une équation : **(6 points)**

a) de la droite $d'$ passant par A et parallèle à la droite d'équation : $2x - 3y + 1 = 0$.

b) de la médiane issue de A au triangle ABC.

c) du cercle $\Gamma$ de centre A et de rayon BC.

d) du cercle de diamètre [AB].

2) Soit $\Gamma' : x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$

a) Déterminer la nature de $\Gamma'$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\Gamma'$ et de l'axe des abscisses.

---

II) 1) Calculer $S = 1 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\pi$ et $T = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi$. **(5,5 points)**

2) Simplifier :

$$U = \cos(3\pi + x) + \cos(2\pi - x) + \cos(\pi - x)$$
$$V = \sin(3\pi + x) + \sin(2\pi - x) + \sin(\pi - x)$$

3) On admet que : $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ; montrer que $\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

4) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

(E1) : $\cos x = \frac{1}{2}$  (E2) : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (E3) : $\cos 2x = \sin x$  (E4) : $\sin x = 3$

---

III) A quoi est égal : $\frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ ? **(2 points)**

Soit ABCD un parallélogramme de sens direct tel que : AB = 5 ; AC = 6 et AD = 3 ; calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ ; en déduire $\cos\widehat{BAD}$.

---

IV) 1) Dans le triangle ABC, AB = 3 ; AC = 6 et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -9$ ; **(3,5 points)**
déterminer $\cos\widehat{A}$ ; puis la valeur exacte de l'angle $\widehat{A}$.

2) Soient I(2 ;1), J(1 ;-2) et K(-2 ;-1).
Calculer : $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK}$ ; a-t-on JI = JK ? En déduire la nature exacte du triangle IJK.

3) Soient $\|\vec{u}\| = 2$ ; $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ ; calculer $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

---

V) Soit un triangle ABC ; en posant : $a = \text{BC}$, $b = \text{CA}$, $c = \text{AB}$. **(3 points)**

1) Montrer que : $\text{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ ; en déduire que : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
(formule de AL-Kashi).

2) Quel théorème retrouve-t-on si $\widehat{A}$ est un angle droit ?

3) Calculer $a = \text{BC}$ si $b = 5$ , $c = 7$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{6}$.

4) a) Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$ : $c^2 - 4c - 33 = 0$

b) Calculer $c = \text{AB}$ si $a = 7$ , $b = 4$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$