Devoir de mathématiques n°15 (DS) (10-05-2012)

I) 1) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. **(6 points)**

Soient les points A$(-1; 0)$, B$(3; 4)$ et C$(5; -2)$. Déterminer une équation :

a) de la médiatrice du segment (AB].

b) de la hauteur issue de A du triangle ABC.

c) du cercle de diamètre [AB].

2) Soit $\Gamma \ : \ x^2 + y^2 - 4x + 3y - \dfrac{11}{4} = 0$

a) Déterminer la nature de Γ et déterminer ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ et de la droite d d'équation $y = x$.

II) Soient deux points du plan A et B tels que AB = 6 (en cm) et I le milieu du segment [AB].**(5 pts)**

1) Montrer que, pour tout point M : $M\mathrm{A}^2 + M\mathrm{B}^2 = 2M\mathrm{I}^2 + \dfrac{\mathrm{AB}^2}{2}$.

2) Soit l'ensemble E des points M du plan tels que : $M\mathrm{A}^2 + M\mathrm{B}^2 = 26$

a) Montrer que, pour tout point M : $M \in \mathrm{E} \iff M\mathrm{I} = 2$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble E.

III) (les exercices sont indépendants) **(13,5 points)**

1) Calculer (en donnant les valeurs exactes) : $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$; $\sin\dfrac{7\pi}{12}$; puis $\tan\dfrac{7\pi}{12}$.

2) Soient $a \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $\cos a = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; déterminer : $\cos(2a)$

3) Soit $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{4}\right[$; On pose : $f(x) = \dfrac{\sin(6x)}{\sin(2x)} - \dfrac{\cos(6x)}{\cos(2x)}$.

a) Montrer que : $\sin(2x) \neq 0$ et $\cos(2x) \neq 0$

b) Simplifier : $\sin(6x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos(6x)$

c) En déduire que : $f(x) = 2$.

4) a) Montrer que, pour tout réel x : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

b) En déduire les solutions de l'équation trigonométrique : $4\cos^3 x - 3\cos x = 0$.

5) Résoudre les équations trigonométriques :

$$(E_l) \ : \ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (E_2) \ : \ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (E_3) \ : \ \cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

IV) ABCD est un carré ; soit de plus le point I tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. **(5,5 points)**

1) On considère le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$
   a) Donner les coordonnées des points A, B, C, D et I.
   b) Calculer : $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$, et les longueurs IB et IC.
2) En déduire $\cos\widehat{BIC}$.
3) Sans utiliser de coordonnées mais en décomposant les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$, retrouver $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$