Devoir de mathématiques n°2 (DS) (10-2011)

I) 1) Calculer et simplifier : $a = \dfrac{1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}{2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}}$; $b = \dfrac{1+\dfrac{1}{5}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{4}{5}}}$

2) $A = \sqrt{12} + 5\sqrt{75} - 7\sqrt{27}$; $B = \sqrt{0,49}$; $C = \sqrt{0,9\times 10^3}$

3) $p = \sqrt{3-\sqrt{5}} \times \sqrt{3+\sqrt{5}}$; $r = \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$ (vérifier que r est entier)

4) Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$ ($a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$) : $x = \dfrac{16}{5\sqrt{2}}$; $z = \dfrac{4-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}$

II) 1) On pose $P(x) = (5x-3)^2 - (2x-1)^2$

a) Développer et simplifier $P(x)$.

b) Factoriser $P(x)$.

c) Calculer : $P(0)$, $P(-2)$, $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$

d) Resoudre les équations : $P(x) = 0$; $P(x) = 8$; $P(x) = -26x$.

2) Factoriser : $A(x) = (5x-2)^2 - 3(5x-2)(x+2)$; $C(x) = (x^2-6x+9)(x^2-9)$

3) Résoudre les inéquations : (I_1) $\dfrac{3x+1}{x+2} \geqslant 0$; $I_2)$ $(3x+1)^2 \leqslant 2(3x+1)(x+1)$
(faire un tableau de signes)

III) 1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3(x-2)^2 + 5$
Montrer que f a un maximum sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^2 - 6x + 3$.

a) Mettre $g(x)$ sous forme canonique.

b) En deduire que g a un extremum sur $\mathbb{R}$.

IV) Résoudre les équations :

(E_1) $2^2 - 6x + 8 = 0$

(E_2) $x^2 - 2x + 5 = 0$

(E_3) $5x^2 - 10x + 5 = 0$

(E_4) $3x^2 - 6x + 8 = x^2 + 2x + 10$

(E_5) $\dfrac{2x-1}{x-5} = \dfrac{x+1}{x-3}$

V) Factoriser, puis simplifier : $\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-5}$ $D_f = \mathbb{R}/\left\{\dfrac{-5}{2}; 1\right\}$

VI) Le plan est muni d'un repère orthogonal. (ne pas tracer les courbes)
Soient les fonctions f et g definies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et par : $g(x) = -4x + 2$.

1) a) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

b) En deduire les coordonnees des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2) a) Simplifier $h(x) = f(x) - g(x)$; puis determiner le signe de $h(x)$.

b) En déduire la position de la parabole $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{C}_g$ en fonction de x.

VII) Déterminer les deux reels x tels que si au carre de x, on ajoute le triple de x alors on obtient 4.

VIII) ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 6$ et $AC = 5$.

Soit M un point du segment $[AB]$ tel que $BM = x$ $(0 < x < 6)$ $AMNP$ est un rectangle inscrit dans le triangle ABC. Déterminer MN en fonction de x.

Determiner la valeur de x tel que l'aire du rectangle $AMNP$ soit égale au quart de l'aire du triangle ABC.