

Devoir de mathématiques n°4 (DS) (21-11-2011)

I) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Soit \mathcal{C}_f la parabole représentant f ; le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm.

- 1) Déterminer la forme canonique de $f(x)$
- 2) Montrer que f a un extremum
- 3) Déterminer le sens de variation de f sur $] -\infty; \frac{5}{2}]$ et sur $]\frac{5}{2}; +\infty[$. (le montrer)
- 4) Dresser le tableau de variation de f .
- 5) Tracer la parabole \mathcal{C}_f .
- 6) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x - 4$.
 - a) Étudier le signe de : $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - b) En déduire la position \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{C}_g .

II) Résoudre l'équation (E_1) : $4x^2 - 7x + 3 = 0$ puis en déduire les équations suivantes :

$$(E_2) \quad 4x^4 - 7x^2 + 3 = 0 \qquad (E_3) \quad 4x - 7\sqrt{x} + 3 = 0 \qquad (E_4) \quad 4x^2 - 7|x| + 3 = 0$$

III) Soit $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ ($x \in \mathbb{R} - \{-3; 1\}$). Simplifier $f(x)$.

IV) Soit l'équation : $3x^2 - ax + 6 = 0$ (a étant un réel fixé). Déterminer le réel a tel que 2 soit solution de l'équation ; en déduire l'autre solution.

V) Résoudre les inéquations suivantes :

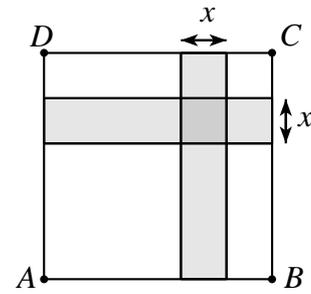
- | | |
|----------------------------|--|
| a) $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$ | d) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} \leq 0$ |
| b) $-2x^2 + x - 3 \geq 0$ | e) $\frac{2x + 1}{x - 2} \leq \frac{x + 1}{x + 3}$ |
| c) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$ | |

VI) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m$.

- 1) Déterminer l'ensemble E des réels m tels que $f(x)$ soit un polynôme du second degré ; dans ce cas, calculer le discriminant Δ_m .
- 2) Déterminer l'ensemble F des réels m tels que l'équation $f(x) = 0$ ait exactement 2 racines distinctes.
- 3) Déterminer l'ensemble G des réels m tels que l'équation $f(x) = 0$ ait exactement 1 racine.
- 4) Déterminer l'ensemble H des réels m tels que, pour tout réel x : $f(x) > 0$.

VII) $ABCD$ est un carré de côté 10 cm (figure ci-contre).

- 1) Exprimer l'aire de la zone grisée en fonction de x .
- 2) Déterminer x de sorte que l'aire de la zone hachurée soit égale à la moitié de l'aire du carré.



VIII) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{4\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x-4} - 3$

Étudier le sens de variation de f (on pourra utiliser un tableau avec différentes fonctions).

IX) La phrase suivante est-elle vraie ? (préciser) :

« Soit l'équation dans \mathbb{R} : $x^2 - x + 1 = 0$ alors la somme des solutions est 1 et le produit 1 »

X) Déterminer les couples $(x; y)$ tels que :
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$$