Devoir de mathématiques n˚7 (DS) (19-01-2012)

I) **ROC** :

1) Donner la définition de
   a) une fonction f est dérivable en a ($a \in D_f$).
   b) la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f au point d'abscisse a.

2) **Cas particulier** : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   a) Soit a un réel non nul ; en utilisant $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{x - a}$ (penser aux conditions), montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que : $f'(a) = \ldots\ldots$ (à préciser).
   b) Déterminer une équation de la tangente T_1
   c) En utilisant un repère orthonormé, tracer T_1 ; et la courbe $\mathscr{C}_f$.
   d) On pose : $h(x) = \dfrac{1}{x} - (-x + 2)$.
      i) En simplifiant, déterminer le signe de $h(x)$ à l'aide d'un tableau de signes.
      ii) En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à T_1.

II) Pour chaque fonction f définie sur D_f , préciser D_f, $D_{f'}$, et calculer $f'(x)$

1) $f(x) = 5x^4 - 4x^3 - 2x^3 + 4x + 2$
2) $f(x) = \dfrac{4}{x^3}$
3) $f(x) = \dfrac{2}{3x - 4}$
4) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{-2x + 4}$

III) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

1) Calculer $f'(x)$
2) Déterminer une équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_f$; puis de la tangente T_{-2}
3) Pour quelle valeur de a la tangente est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?

IV) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)(x^2 - 2x + 1)$;

1) Sans développer, calculer $f'(x)$.
2) Vérifier que, pour tout réel x : $f'(x) = (x - 1)(8x^2 - 13x + 5)$.
3) A raide d'un tableau de signes, déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x ; puis en déduire le sens de variation de f.

V) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$

1) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$; puis calculer $f'(x)$.

2) Déterminer le tableau de variation de f.

3) Déterminer les extremums (locaux) de f.

VI) Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (x+2)\sqrt{x}$.

1) En utilisant $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ avec $h > 0$; déterminer la dérivabilité de f en 0.

2) a) Etudier la dérivabilité de f sur $]0; +\infty[$; dans ce cas, montrer que $f'(x)$ a même signe que $(3x+2)$.

b) Déterminer le tableau de variation de f.

c) En déduire que f a un extremum sur $[0 : +\infty[$.