Rappels sur les équations et inéquations du 1er degré

Table des matières

1 Équation du premier degré

Théorème 1 : Toute équation du premier degré peut se mettre sous la forme :

$$ax = b$$

- Si $a \neq 0$ alors l'équation a une unique solution $x = \dfrac{b}{a}$
- Si $a = 0$ et $b = 0$ alors tout x est solution $S = \mathbb{R}$.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation n'a pas de solution $S = \varnothing$

Exemple : Soit l'équation suivante : $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{3(x-2)}{4} = \dfrac{-7x+2}{12} + 2$

⚠ Pour éviter de "*traîner*" des dénominateurs, multiplions par le dénominateur commun, ici 12

$$\begin{aligned}
(\times 12) \quad 4(x+2) - 9(x-2) &= -7x + 2 + 24 \\
4x + 8 - 9x + 18 &= -7x + 2 + 24 \\
4x - 9x + 7x &= -8 - 18 + 2 + 24 \\
2x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

On conclut par l'ensemble solution : $S = \{0\}$

2 Équation se ramenant au premier degré

2.1 Équation rationnelle

Pour une équation rationnelle, on précise son ensemble de définition D_f puis on multiplie l'équation par le dénominateur commun ou éventuellement on effectue un produit en croix.

Exemples :

1) Soit l'équation suivante : $\dfrac{x-3}{2x-4} = \dfrac{x-2}{2x-5}$

- On détermine l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \left\{2; \dfrac{5}{2}\right\}$
- On effectue un produit en croix :

$$\begin{aligned}
x \in D_f \qquad (x-3)(2x-5) &= (x-2)(2x-4) \\
2x^2 - 5x - 6x + 15 &= 2x^2 - 4x - 4x + 8 \\
-5x - 6x + 4x + 4x &= -15 + 8 \\
-3x &= -7 \\
x &= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

or $\dfrac{7}{3} \in D_f$ donc $S = \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$

2) Soit l'équation suivante : $\dfrac{-4}{x-4}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-3}{x-3}$

- On détermine l'ensemble de définition : $D_f=\mathbb{R}-\{0;3;4\}$
- On multiplie par le dénominateur commun ici $x(x-4)(x-3)$:

$$x\in D_f \qquad \begin{aligned} -4x(x-3)+(x-4)(x-3) &= -3x(x-4)\\ -4x^2+12x+x^2-3x-4x+12 &= -3x^2+12x\\ -4x^2+x^2+3x^2-3x-4x &= -12\\ -7x &= -12\\ x &= \frac{12}{7} \end{aligned}$$

or $\dfrac{12}{7}\in D_f$ donc $S=\left\{\dfrac{12}{7}\right\}$

2.2 Par une factorisation

Lorsqu'une équation polynomiale n'est pas du premier degré, on "*passe*" tous les termes à gauche, c'est à dire qu'on **annule le second membre**. On cherche ensuite à factoriser si cela est possible.
Il existe deux façons pour factoriser : soit par un facteur commun soit par une identité remarquable.

2.2.1 Par un facteur commun

Règle 1 : Une factorisation par un facteur commun peut se résumer par l'égalité suivante :

$$ab+ac=a(b+c)$$

Exemple : Soit l'équation suivante : $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x-6)$

⚠ On pourrait être tenté de simplifier par $x-1$ car il apparaît de chaque côté de l'équation. Cependant cette quantité pourrait être nulle et l'on serait dans le cas d'une division par "*zéro*" ce qui est impossible. Il faut donc annuler le second membre puis factoriser.

$$\begin{aligned} (x-1)(2x+3) &= (x-1)(x-6)\\ (x-1)(2x+3)-(x-1)(x-6) &= 0\\ (x-1)\left[(2x+3)-(x-6)\right] &= 0\\ (x-1)(2x+3-x+6) &= 0\\ (x-1)(x+9) &= 0 \end{aligned}$$

un produit est nul lorsque l'un au moins des facteurs est nul

$$\begin{aligned} x-1=0 &\quad \text{ou} \quad x+9=0\\ x=1 &\quad \text{ou} \quad x=-9 \end{aligned}$$

$$S=\{-9;1\}$$

2.2.2 Par une identité remarquable

Règle 2 : Il y a trois identités remarquables du second degré qui permettent de factoriser :

$$\begin{array}{ll} a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) & \text{différence de deux carrés} \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 & \text{carré parfait} \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 & \text{carré parfait} \end{array}$$

Exemple : Soit l'équation suivante : $(5x+2)^2 = (x+1)^2$

On annule le second le membre puis on factorise par une différence de deux carrés.

$$\begin{aligned} (5x+2)^2 &= (x+1)^2 \\ (5x+2)^2 - (x+1)^2 &= 0 \\ (5x+2-x-1)(5x+2+x+1) &= 0 \\ (4x+1)(6x+3) &= 0 \\ 3(4x+1)(2x+1) &= 0 \end{aligned}$$

un produit est nul lorsque l'un au moins des facteur est nul

$$\begin{array}{rcl} 4x+1=0 & \text{ou} & 2x+1=0 \\ 4x=-1 & \text{ou} & 2x=-1 \\ x=-\dfrac{1}{4} & \text{ou} & x=-\dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right\}$$

⚠ Cette équation peut aussi se résoudre par l'égalité de deux carrés. Cf ci-après.

2.3 Par une égalité de deux carrés

Règle 3 : Deux nombres au carré sont égaux si et seulement si ces nombres sont égaux ou opposés. C'est à dire que :

$$a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$$

Exemple : Reprenons l'exemple dernier : $(5x+2)^2 = (x+1)^2$

Égalité de deux carrés donc :

$$\begin{array}{rcl} 5x+2=x+1 & \text{ou} & 5x+2=-x-1 \\ 5x-x=-2+1 & \text{ou} & 5x+x=-2-1 \\ 4x=-1 & \text{ou} & 6x=-3 \\ x=-\dfrac{1}{4} & \text{ou} & x=-\dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right\}$$

3 Inéquation du premier degré

Théorème 2 : Toute inéquation du premier degré peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$ax \leqslant b \quad , \quad ax < b \quad , \quad ax \geqslant b \quad , \quad ax > b$$

- Si $a \neq 0$ on obtient soit une section finissante, soit une section commençante.
- Si $a = 0$ l'inéquation est soit toujours vraie, soit impossible

⚠ Lorsque l'on multiplie ou divise une inéquation par un nombre négatif, il faut inverser l'inégalité

Exemple : Résoudre l'inéquation suivante : $2(x-1) - 3(x+1) > 4(3x+2)$

$$\begin{aligned}
2(x-1) - 3(x+1) &> 4(3x+2) \\
2x - 2 - 3x - 3 &> 12x + 8 \\
2x - 3x - 12x &> 2 + 3 + 8 \\
-13x &> 13
\end{aligned}$$

on divise par -13, on inverse donc l'inégalité : $x < \dfrac{13}{-13} \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$

on conclut par l'intervalle solution : $S =]-\infty\,;\,-1[$

4 Inéquation se ramenant au premier degré

Pour résoudre une inéquation qui se ramène au 1$^{\text{er}}$ degré par une factorisation ou par le quotient de facteurs du 1$^{\text{er}}$ degré, on remplit un tableau de signe afin de pouvoir conclure sur l'ensemble solution.

Règle 4 : Le signe du binôme $ax + b$, suivant les valeur de x, peut se résumer au tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		**signe de $(-a)$**	0	**signe de a**	

4.1 Par une factorisation

Exemple : Soit l'inéquation suivante : $(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$

L'inéquation n'est pas du 1$^{\text{er}}$ degré et le second terme de l'inéquation n'est pas nul. Il faut revenir à une forme factorisée avec un second terme nul.

- On annule le second terme. L'inéquation devient alors :

$$(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-3)<0$$

- On factorise :

$$\begin{aligned}(x-5)\left[(x-2)-(2x-3)\right]&<0\\(x-5)(x-2-2x+3)&<0\\(x-5)(-x+1)&<0\end{aligned}$$

On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières.

- Valeurs frontières :

$$\begin{aligned}x-5=0 &\quad \text{donc} \quad x=5\\-x+1=0 &\quad \text{donc} \quad -x=-1 \quad \text{d'où} \quad x=1\end{aligned}$$

- On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-5)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Pour que le produit soit strictement négatif, nous avons deux possibilités

$$x<1 \quad \text{ou} \quad x>5$$

La solution est donc : $S =]-\infty\,;\,1\,[\,\cup\,]\,5\,;\,+\infty\,[$

4.2 Inéquation rationnelle

Exemple : Soit l'inéquation suivante : $\dfrac{4}{x+1} \leqslant 3$

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, comme le second terme n'est pas nul, il faut donc l'annuler. On réduit ensuite au même dénominateur de façon à n'avoir qu'une seule fraction.

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- On annule le second terme et on réduit au même dénominateur :

$$\frac{4}{x+1}-3 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4-3x-3}{x+1} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3x+1}{x+1} \leqslant 0$$

- On cherche les valeurs frontières :

$$\begin{aligned}-3x+1=0 &\quad \text{donc} \quad -3x=-1 \quad \text{d'où} \quad x=\frac{1}{3}\\x+1=0 &\quad \text{donc} \quad x=-1\end{aligned}$$

- On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-3x+1}{x+1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

- Conclusion : pour que le quotient soit négatif ou nul, on a donc :

$$x < -1 \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{1}{3}$$

La solution est donc : $S = \left] -\infty\,; -1 \right[\cup \left[\dfrac{1}{3}\,;\, +\infty \right[$