Équations irrationnelles

1 Équation du type $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$

Propriété 1 : L'équation $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$ est définie, si et seulement si :

$$A(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad B(x) \geqslant 0$$

On en déduit alors l'ensemble de définition D_f de l'équation.

On élève ensuite au carré, en remarquant qu'il y a équivalence que si $x \in D_f$

Exemples :

1) Résoudre : $\sqrt{4x-1} = \sqrt{3-x}$

- On détermine l'ensemble de définition D_f

$$\begin{cases} 4x-1 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{4} \\ x \leqslant 3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad D_f = \left[\frac{1}{4}\,;\,3\right]$$

- On élève au carré : $x \in D_f$ et $4x-1 = 3-x \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{5}$

$$\frac{4}{5} \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$$

2) Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$

- L'ensemble de définition de l'équation vérifie : $\begin{cases} x+12 \geqslant 0 \\ x^2+2x-8 \geqslant 0 \end{cases}$

  La première inéquation ne pose pas de problème. Il faut déterminer les racines de la deuxième : $x^2+2x-8 \geqslant 0$

  $x_1 = 2$ racine évidente car $2^2+2\times 2-8 = 0$

  le produit des racine $P = -8$, donc $x_2 = -4$

  Comme on veut que la quantité soit positive ou nulle et que $a = 1$, on prend à l'extèrieur des racines $]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$

  Le système devient alors : $\begin{cases} x \geqslant -12 \\ x \in]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[\end{cases}$

  L'ensemble de définition est donc : $D_f = [-12\,; -4] \cup [2\,; +\infty[$

- On élève au carré : $x \in D_f, \quad x+12 = x^2+2x-8 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2-x+20=0$

  On calcule : $\Delta = 1+80 = 81 = 9^2, \quad \Delta > 0$, on a deux racines :

$$x_1 = \frac{1+9}{-2} = -5 \in D_f \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-9}{-2} = 4 \in D_f \quad \text{donc } S = \{-5\,;\,4\}$$

2 Équation du type $\sqrt{A(x)} = B(x)$

Propriété 2 : L'équation $\sqrt{A(x)} = B(x)$ est définie, si et seulement si :

$$A(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad B(x) \geqslant 0$$

Cependant la première condition est superflue. Si on élève au carré l'équation, on obtient : $A(x) = [B(x)]^2$

Si cette égalité est vérifiée alors $A(x)$ est nécessairement positif ou nul.

L'équation est donc équivalente à : $B(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad A(x) = [B(x)]^2$

Exemples :

1) Soit l'équation suivante : $\sqrt{x^2-1} = x+2$

- On détermine l'ensemble de définition :

$$x+2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad D_f = [-2; +\infty[$$

- On élève au carré : $x \in D_f$ et

$$x^2-1 = (x+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1 = x^2+4x+4 \quad \Leftrightarrow \quad -4x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{4}$$

$$-\frac{5}{4} \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$$

2) Soit l'équation suivante : $\sqrt{4-x} = x-2$

- On détermine l'ensemble de définition :

$$x-2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad D_f = [2; +\infty[$$

- On élève au carré : $x \in D_f$ et

$$4-x = (x-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4-x = x^2-4x+4 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = 3$$

$$0 \notin D_f \text{ et } 3 \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \{3\}$$

3 Exercices

a) $\sqrt{x-4} = x+1$ b) $\sqrt{x^2-12} = 2x-1$ c) $\sqrt{2x-6} = x-7$

d) $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$ e) $\sqrt{3x+3} = \sqrt{x^2+x-8}$

4 Correction des exercices

1) Condition : $x+1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -1 \quad \Leftrightarrow \quad D_f = [-1\,;+\infty[$

$x \in D_f,\ \ x-4 = x^2+2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x+5=0, \quad \Delta = -19 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \varnothing$

2) Condition : $2x-1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad D_f = \left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

$x \in D_f,\ \ x^2-12 = 4x^2-4x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2+8x+1=0, \quad \Delta = 52 = (2\sqrt{13})^2$

$x_1 = \dfrac{-8+2\sqrt{13}}{6} = \dfrac{-4+\sqrt{13}}{3} \notin D_f \quad \text{ou} \quad x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{13}}{3} \notin D_f \quad \Rightarrow \quad S = \varnothing$

3) Condition : $x-7 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 7 \quad \Leftrightarrow \quad D_f = [7\,;+\infty[$

$x \in D_f,\ \ 2x-6 = x^2-14x+49 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-16x+55=0, \quad \Delta = 36 = 6^2$

$x_1 = \dfrac{16+6}{2} = 11 \in D_f \quad \text{ou} \quad x_2 = \dfrac{16-6}{2} = 5 \notin D_f \quad \Rightarrow \quad S = \{11\}$

4) Conditions : $x+12 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2+2x-8 \geqslant 0$

Racines de : $x^2+2x-8=0, \quad \Delta = 36 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \ \text{ou}\ x_2 = -4$

Donc : $\begin{cases} x \geqslant -12 \\ x \in]-\infty\,;\,-4] \cup [2\,;+\infty[\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad D_f = [-12\,;-4] \cup [2\,;+\infty[$

$x \in D_f,\ \ x+12 = x^2+2x-8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-20=0, \quad \Delta = 81 = 9^2$

$x_1 = \dfrac{-1+9}{2} = 4 \in D_f \quad \text{ou} \quad x_2 = \dfrac{-2-9}{2} = -5 \in D_f \quad \Rightarrow \quad S = \{-5\,;\,4\}$

5) Conditions : $3x+3 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2+x-8 \geqslant 0$

Racines de : $x^2+x-8=0, \quad \Delta = 33 \quad \Rightarrow$

$x' = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2} \simeq 2,37 \quad \text{ou} \quad x'' = \dfrac{-1-\sqrt{33}}{2} \simeq -3,37$

Donc : $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \in]-\infty\,;\,-x''] \cup [x'\,;+\infty[\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad D_f = \left[\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}\,;+\infty\right[$

$x \in D_f,\ \ 3x+3 = x^2+x-8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x-11=0, \quad \Delta = 48 = (4\sqrt{3})^2$

$x_1 = \dfrac{2+4\sqrt{3}}{2} = 1+2\sqrt{13} \simeq 4,46 \in D_f \quad \text{ou} \quad x_2 = 1-2\sqrt{3} \simeq -2,46 \notin D_f \quad \Rightarrow$

$S = \left\{1+2\sqrt{3}\right\}$