

Le second degré

Table des matières

1	La forme canonique du trinôme	2
1.1	Le trinôme du second degré	2
1.2	Quelques exemples de formes canoniques	2
1.3	Forme canonique du trinôme	3
2	Racines du trinôme	4
2.1	Définition	4
2.2	Le discriminant est positif	4
2.3	Le discriminant est nul	5
2.4	Le discriminant est négatif	5
2.5	Conclusion	5
3	Factorisation, somme et produit des racines	6
3.1	Factorisation du trinôme	6
3.2	Somme et produit des racines	7
3.3	Application	8
4	Signe du trinôme et inéquation du second degré	8
4.1	Le discriminant est positif	8
4.2	Le discriminant est nul ou négatif	9
4.3	Conclusion	9
5	Représentation de la fonction trinôme	9
6	Équation paramétrique	10
7	Équation, inéquation se ramenant au second degré	12
7.1	Équation rationnelle	12
7.2	Inéquation rationnelle	13
7.3	Équation bicarrée	13
7.4	Somme et produit de deux inconnues	14
8	Quelques problèmes du second degré	14
8.1	Problème de résistance équivalente	14
8.2	Un problème de robinet	15
8.3	Une histoire de ficelle	16

1 La forme canonique du trinôme

1.1 Le trinôme du second degré

Définition 1 : On appelle trinôme du second degré ou simplement trinôme, le polynôme $P(x)$, à coefficients réels, de la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Remarque : Le coefficient a est parfois appelé le coefficient quadratique.

Exemple : Les trois polynômes suivants sont des trinômes :

$$P_1(x) = x^2 + 2x - 8, \quad P_2(x) = 2x^2 + 3x - 14, \quad P_3(x) = -x^2 + 4x - 5$$

1.2 Quelques exemples de formes canoniques

La forme canonique d'un trinôme est une forme à partir de laquelle on peut savoir si le trinôme peut se factoriser ou non. Cette forme est obtenue à partir d'une « astuce » qui consiste à rajouter un terme puis à l'ôter de façon à obtenir le début d'un carré parfait.

Exemple : Soit $P_1(x) = x^2 + 2x - 8$

Les deux premiers termes sont $x^2 + 2x$ qui est le début de $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. On ajoute 1 puis on le soustrait, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 8 \\ &= (x + 1)^2 - 9 \quad \text{forme canonique de } P_1(x) \\ &\text{on peut, à partir de cette forme, factoriser :} \\ &= (x + 1)^2 - 3^2 \\ &= (x + 1 - 3)(x + 1 + 3) \\ &= (x - 2)(x + 4) \end{aligned}$$

Exemple : Soit $P_2(x) = 2x^2 + 3x - 14$

On factorise par le coefficient devant x^2 , c'est à dire ici 2.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 7 \right) \\ \left(x^2 + \frac{3}{2}x \right) &\text{ est le début de } \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}, \text{ on obtient :} \\ &= 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - 7 \right) \\ &= 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} - 7 \right] \\ &= 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{121}{16} \right] = 2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{121}{8} \quad \text{forme canonique de } P_2(x) \end{aligned}$$

on peut, à partir de cette forme, factoriser :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{11}{4} \right)^2 \right] \\ &= 2 \left(x + \frac{3}{4} - \frac{11}{4} \right) \left(x + \frac{3}{4} + \frac{11}{4} \right) \\ &= 2(x-2) \left(x + \frac{7}{2} \right) = (x-2)(2x+7) \end{aligned}$$

Exemple : Soit $P_3(x) = -x^2 + 4x - 5$

On factorise par le coefficient devant x^2 , c'est à dire ici -1 .

$$\begin{aligned} P_3(x) &= - (x^2 - 4x + 5) \\ (x^2 - 4x) &\text{ est le début de } (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4, \text{ on obtient :} \\ &= - (x^2 - 4x + 4 - 4 + 5) \\ &= - [(x-2)^2 - 4 + 5] \\ &= - [(x-2)^2 + 1] = -(x-2)^2 - 1 \quad \text{forme canonique de } P_2(x) \end{aligned}$$

On ne peut factoriser cette forme car somme de deux carrés

1.3 Forme canonique du trinôme

Soit un trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$

On factorise par $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} P(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ x^2 + \frac{b}{a}x &\text{ est le début de } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}, \text{ on obtient :} \\ &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Théorème 1 : La forme canonique d'un trinôme est de la forme :

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad \text{ou} \quad P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

⚠ Dans un cas concret, on n'utilise pas cette formule un peu difficile à mémoriser, mais on retient l'astuce qui consiste à ajouter puis soustraire un terme comme nous l'avons vu dans les exemples précédents.

2 Racines du trinôme

2.1 Définition

Définition 2 : Les racines d'un trinôme sont les solutions de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Remarque : Les racines du trinôme sont parfois appelées « zéros » du trinôme.

Définition 3 : On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé **discriminant**

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ devient en utilisant la forme canonique :

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$$

Remarque : Le nombre de racines du trinôme dépend du signe de Δ , d'où le nom de discriminant.

2.2 Le discriminant est positif

Comme le discriminant Δ est positif, la forme canonique se factorise en :

$$a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$$

On obtient alors deux solutions :

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

Soit, en appelant x_1 et x_2 les deux solutions

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} : $2x^2 + 3x - 14 = 0$

- On calcule Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-14) = 9 + 112 = 121 = 11^2$
- $\Delta > 0$, il existe deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 11}{4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 11}{4} = -\frac{7}{2}$$

- On conclut par : $S = \left\{ -\frac{7}{2}; 2 \right\}$

2.3 Le discriminant est nul

Comme le discriminant Δ est nul, la forme canonique correspond à un carré parfait. Elle se factorise en :

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$$

On obtient alors qu'une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} : $3x^2 - 18x + 27 = 0$

- On calcule Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \times 3 \times 27 = 324 - 324 = 0$
- $\Delta = 0$, il n'existe qu'une seule solution x_0 : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{6} = -3$
- On conclut par : $S = \{-3\}$

2.4 Le discriminant est négatif

Comme le discriminant Δ est négatif la forme canonique ne se factorise pas. Il n'y a donc aucune solution à l'équation du second degré.

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} : $-x^2 + 4x - 5 = 0$

- On calcule Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 16 - 20 = -4$
- $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.
- On conclut par : $S = \emptyset$

2.5 Conclusion

Théorème 2 : Le nombre de racines du trinôme du second degré dépend du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ deux racines distinctes dans \mathbb{R} :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ une racine dans \mathbb{R} (racine double) : $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ pas de racine dans \mathbb{R} .

⚠ Lorsqu'on peut factoriser le trinôme, on ne calcule pas le discriminant, on factorise puis on annule chaque facteur.

Exemple : Déterminer les solutions des équations suivantes :

a) $4x^2 - 25 = 0$

b) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

a) L'équation se factorise en utilisant la différence de deux carrés :

$$4x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (2x - 5)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{2}$$

b) L'équation correspond à un carré parfait :

$$9x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Algorithme : Soit l'algorithme suivant pour résoudre : $ax^2 + bx + c = 0$

Avec la calculatrice : pour les trois cas à analyser, on utilise deux « Si ».

On appelle les deux solutions, lorsqu'elles existent X et Y.

En python, on crée une fonction : `resol_trinom` qui prend comme argument a, b, c .Pour les trois cas à analyser on utilise la suite multi-conditionnelle : `if, elif, else`

```
import math as m
def resol_trinom(a,b,c):
    delta=b**2-4*a*c
    if delta >0:
        x1=(-b + m.sqrt(delta))/(2*a)
        x2=(-b - m.sqrt(delta))/(2*a)
        return x1,x2
    elif delta ==0:
        x0=-b/(2*a)
        return x0
    else:
        return "pas_de_solution"
```

Entrées et initialisationLire A, B, C $B^2 - 4AC \rightarrow \Delta$ **Traitement et sorties****si** $\Delta > 0$ **alors** $\frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \rightarrow X$ $\frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \rightarrow Y$

Afficher X, Y

sinon**si** $\Delta = 0$ **alors** $-\frac{B}{2A} \rightarrow X$

Afficher X

sinon

Afficher "Pas de Solution"

fin**fin**

3 Factorisation, somme et produit des racines

3.1 Factorisation du trinôme

Si le discriminant est positif. Nous avons vu que le trinôme se factorise en :

$$a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$$

En remplaçant par les racines x_1 et x_2 , nous avons alors : $a(x - x_1)(x - x_2)$

De même si le discriminant est nul. Nous avons vu que le trinôme se factorise en :

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$$

En remplaçant par la racine x_0 , nous avons alors : $a(x - x_0)^2$ **Exemples** :

a) Factoriser le trinôme suivant : $P(x) = 2x^2 + 3x - 14$

D'après le paragraphe 2.2, les racines de ce trinôme sont : $-\frac{7}{2}$ et 2 , donc :

$$P(x) = 2 \left(x + \frac{7}{2} \right) (x - 2) = (2x + 7)(x - 2)$$

b) Factoriser le trinôme suivant : $Q(x) = 3x^2 - 18x + 27$

D'après le paragraphe 2.3, l'unique racine de ce trinôme est 3 , donc :

$$Q(x) = 3(x - 3)^2$$

⚠ La racine $x = 3$ est une racine double car on peut factoriser par $(x - 3)^2$

Théorème 3 : Lorsque le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet :

- deux racines x_1 et x_2 , alors : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- admet une racine x_0 , alors : $P(x) = a(x - x_0)^2$
- n'admet pas de racine, il ne peut pas se factoriser.

3.2 Somme et produit des racines

Soit le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$. Nous nous plaçons dans le cas où $\Delta > 0$. Il y a donc deux racines x_1 et x_2 . Le trinôme peut alors se factoriser en :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Développons le trinôme :

$$T(x) = a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) = a \left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \right] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

On pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$, on a alors : $P(x) = ax^2 - aSx + aP$

En identifiant à : $P(x) = ax^2 + bx + c$, on obtient alors :

$$-aS = b \Rightarrow S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad aP = c \Rightarrow P = \frac{c}{a}$$

Exemple : Soit le trinôme $P(x) = 2x^2 + 3x - 14$

Nous savons que ce trinôme admet deux solutions $-\frac{7}{2}$ et 2 , on a :

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \quad \text{ce qui se vérifie} \quad -\frac{7}{2} + 2 = -\frac{-7 + 4}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{14}{2} = -7 \quad \text{ce qui se vérifie} \quad -\frac{7}{2} \times 2 = -7$$

Théorème 4 : Si un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines, alors la somme S et le produit P des racines sont égales à :

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a}$$

3.3 Application

Parfois, certaines équations admettent des solutions très simples que l'on appelle « racines évidentes ». Lorsque l'on connaît une telle solution, le produit des racines permet alors de trouver la seconde.

Exemples :

1) Résoudre l'équation : $2x^2 - 5x + 3 = 0$

• $x_1 = 1$ est racine évidente car $2(1)^2 - 5(1) + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$

• $P = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ donc $x_2 = \frac{P}{x_1} = \frac{3}{2}$

$$S = \left\{ 1; \frac{3}{2} \right\}$$

2) Résoudre l'équation : $5x^2 + 2x - 3 = 0$

• $x_1 = -1$ est racine évidente car $5(-1)^2 + 2(-1) - 3 = 5 + 2 - 3 = 0$

• $P = \frac{c}{a} = -\frac{3}{5}$ donc $x_2 = \frac{P}{x_1} = \frac{3}{5}$

$$S = \left\{ -1; \frac{3}{5} \right\}$$

4 Signe du trinôme et inéquation du second degré

4.1 Le discriminant est positif

Si $\Delta > 0$, le trinôme se factorise en : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

En supposant que $x_1 \geq x_2$, dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$x - x_1$	-	-	0	+
$x - x_2$	-	0	+	+
$a(x - x_1)(x - x_2)$	signe de a		signe de $-a$	signe de a

Conclusion : Le signe du trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.

Exemple : Signe de $-3x^2 + 7x + 6$

Il n'y a pas de racine immédiate, calculons alors le discriminant :

$$\Delta = 7^2 - 4(-3)(6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$$

Comme le discriminant est positif, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7 - 11}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

Comme le coefficient devant x^2 est négatif (-3), le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur.

Nous avons alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	3	$+\infty$			
$-3x^2 + 7x + 6$		-	0	+	0	-	

4.2 Le discriminant est nul ou négatif

Si $\Delta = 0$, le trinôme se factorise en : $P(x) = a(x - x_0)^2$

Comme $(x - x_0)^2$ est un carré, il est soit nul soit positif. Donc le trinôme est soit nul soit du signe de a .

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$		
$a(x - x_0)^2$		signe de a	0	signe de a	

Si le discriminant est négatif, il n'a donc pas de racine. Il possède donc un signe constant. On montre alors qu'il est du signe de a .

4.3 Conclusion

Théorème 5 : Le signe du trinôme dépend du discriminant :

- Si $\Delta > 0$, par rapport aux racines, le trinôme est du signe de a à l'extérieur et du signe de $-a$ à l'intérieur.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme est soit nul, soit du signe de a .
- Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a .

5 Représentation de la fonction trinôme

Théorème 6 : La représentation de la fonction trinôme f est une parabole \mathcal{P} dont les caractéristiques dépendent du signe du coefficient a et du signe du discriminant Δ .

Les coordonnées du sommet S de la parabole sont : $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Démonstration : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax^2 + bx + c$
La forme canonique de la fonction f est donc :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

On pose alors : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$.

On a donc : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ⚠ on retrouve le résultat de seconde

Les variations de la fonction f dépendent du coefficient a :

• $a > 0$

• $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

La parabole est dirigée vers le haut

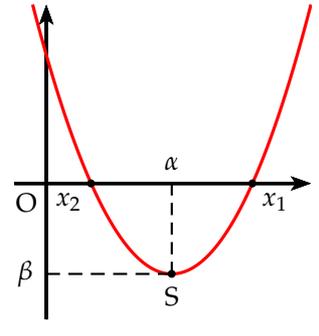
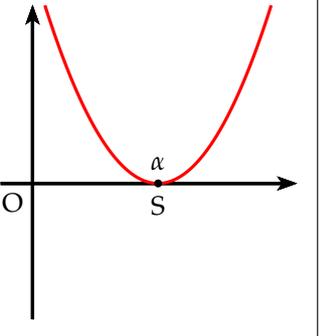
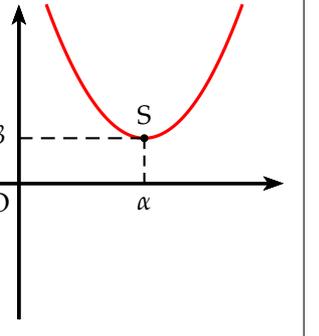
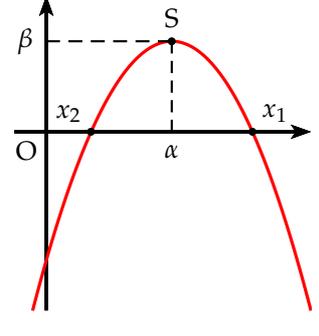
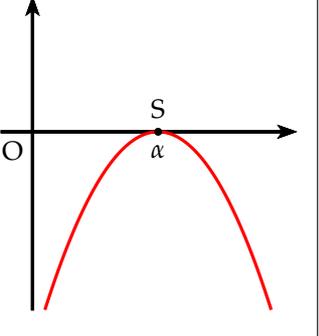
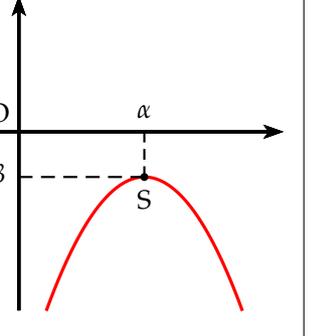
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

La parabole est dirigée vers le bas

Les coordonnées du sommet S sont donc : $S(\alpha ; \beta)$

- Si $\Delta > 0$ la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses.
- Si $\Delta = 0$ la parabole est tangente à l'axe des abscisses.
- Si $\Delta < 0$ la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

On peut résumer ces résultats par le tableau suivant :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

6 Équation paramétrique

Définition 4 : On appelle équation **paramétrique** de paramètre m , une équation d'inconnue x dont on se propose de déterminer le nombre de solutions, leur signe, etc. suivant les valeurs du paramètre m .

Exemple : Déterminer le nombre de solutions de l'équation paramétrique suivante selon les valeurs de m , puis visualiser les résultats obtenus. Montrer que toutes les courbes passent par un point que l'on déterminera.

$$(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0 \quad (E_m)$$

Pour que cette équation soit du second degré, il faut que le coefficient devant x^2 soit non nul. Sinon l'équation est du premier degré.

- 1) Si $m = 1$, alors l'équation est du premier degré : $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$ soit $x = 2$
- 2) Si $m \neq 1$, l'équation est du second degré. On détermine alors le discriminant en fonction de m .

$$\Delta = 4m^2 - 4(m - 1)(m + 3) = 4(m^2 - m^2 - 3m + m + 3) = 4(-2m + 3)$$

Le nombre de solutions est fonction du signe de Δ . Il faut donc déterminer le signe du discriminant.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -2m + 3 = 0 \Leftrightarrow \text{soit } m = \frac{3}{2}$$

On fait alors un tableau de signe, en indiquant le nombre de solutions

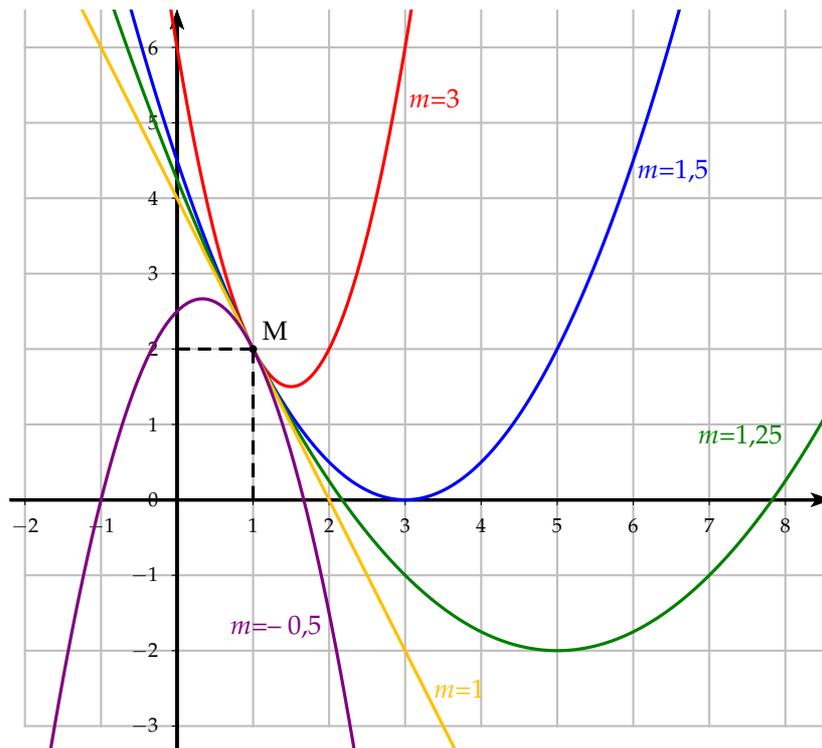
m	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
Δ	+		0	-	
Nombre de solutions	2 solutions x_1 et x_2	1 ^{er} degré 1 sol	2 solutions x_1 et x_2	1 sol double x_0	pas de solution

- 3) Cette équation admet deux solutions, ssi : $m \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; \frac{3}{2}[$

Pour visualiser les résultats obtenus, on trace des courbes représentant la famille des trinômes suivants :

$$P_m(x) = (m - 1)x^2 - 2mx + m + 3$$

On prend par exemple : $m = -0,5$, $m = 1$, $m = 1,25$, $m = 1,5$ et $m = 3$.
On obtient alors :



On observe alors que toutes les courbes semblent passer par le point $M(1 ; 2)$.

Montrons cette conjecture.

Pour que cette conjecture soit vraie, il faut que : $\forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow P_m(1) = 2$

Calculons alors $P_m(1)$:

$$P_m(1) = (m - 1) \times 1^2 - 2m \times 1 + m + 3 = m - 1 - 2m + m + 3 = 2$$

$P_m(1) = 2$ pour toutes les valeurs de m .

Toutes les courbes passent donc par le le point $M(1 ; 2)$.

7 Équation, inéquation se ramenant au second degré

7.1 Équation rationnelle

Soit à résoudre l'équation : $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-5} = \frac{9}{4}$

- On détermine d'abord l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -2 ; \frac{5}{2} \right\}$
- En multipliant l'équation par le dénominateur commun $4(x+2)(2x-5)$

$$\begin{aligned} x \in D_f, \quad 4(2x-5) - 8(x+2) &= 9(x+2)(2x-5) \\ 8x - 20 - 8x - 16 &= 18x^2 - 45x + 36x - 90 \\ -18x^2 + 9x + 54 &= 0 \\ (\div 9) \quad -2x^2 + x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2 \text{ racine évidente car } -2 \times 2^2 + 2 + 6 = 0$$

$$\text{Le produit des racines } P = \frac{6}{-2} = -3 \text{ donc on a } x_2 = \frac{P}{x_1} = -\frac{3}{2}$$

Comme $2 \in D_f$ et $-\frac{3}{2} \in D_f$, on a alors : $S = \left\{ -\frac{3}{2}; 2 \right\}$

7.2 Inéquation rationnelle

Soit à résoudre l'inéquation : $\frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + x - 2} \geq 0$

- On détermine d'abord l'ensemble de définition de l'inéquation :

Il faut déterminer les racines de $x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 = 1$ est racine évidente car $1^2 + 1 - 2 = 0$

Le produit des racines $P = -2$, donc $x_2 = -2$

On conclut que l'ensemble de définition est : $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 1\}$

- Racines de $2x^2 + 5x + 3 = 0$

$x_1 = -1$ est racine évidente car $2 \times (-1)^2 - 5 + 3 = 0$

Le produit des racines $P = \frac{3}{2}$, donc $x_2 = -\frac{3}{2}$

- On remplit un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$
$2x^2 + 5x + 3$	+	+	0	-	0	+
$x^2 + x - 2$	+	0	-	-	-	0
$\frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + x - 2}$	+	-	0	+	0	-

La solution est donc : $S =]-\infty; -2[\cup \left[-\frac{3}{2}; -1 \right] \cup]1; +\infty[$

7.3 Équation bicarrée

Definition 5 : On appelle équation bicarrée, une équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

On effectue le changement de variable suivant : $X = x^2$ avec $X \geq 0$

L'équation devient alors : $aX^2 + bX + c = 0$

On résout en X puis on revient à x en résolvant $x^2 = X$

Exemple : Soit à résoudre dans \mathbb{R} , l'équation suivante : $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

On pose $X = x^2$ avec $X \geq 0$, l'équation devient : $X^2 - 5X - 36 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = 25 + 4 \times 36 = 169 = 13^2$

Comme $\Delta > 0$, on a deux racines : $X_1 = \frac{5+13}{2} = 9$ et $X_2 = \frac{5-13}{2} = -4$

On ne retient que X_1 , car c'est la seule racine positive.

On revient à x : $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

L'ensemble solution est donc : $S = \{-3; 3\}$

7.4 Somme et produit de deux inconnues

Soit le système suivant :
$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

Ce système est symétrique, car on peut intervertir x et y sans que cela ne change le système. Cela veut dire que si le couple (a, b) est solution alors le couple (b, a) l'est également.

Ce système revient à résoudre une équation du second degré où x et y seront les solutions de cette équation. S représente la somme des racines et P leur produit.

On doit donc résoudre :

$$X^2 - SX + P = 0$$

Exemple : Soit à résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases}$$

x et y sont donc les racines de : $X^2 - 18X + 65 = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = 18^2 - 4 \times 65 = 64 = 8^2$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines :

$$X_1 = \frac{18+8}{2} = 13 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{18-8}{2} = 5$$

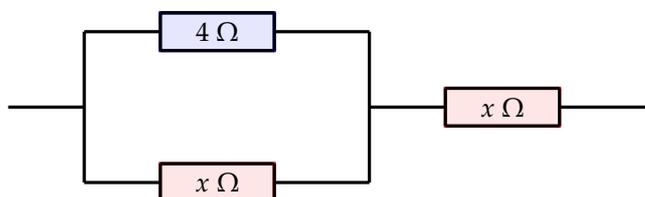
Les solutions du système sont donc : $S = \{(13, 5); (5, 13)\}$

⚠ On pourrait retrouver ce résultat graphiquement par l'intersection de la droite $y = 18 - x$ et de l'hyperbole $y = \frac{65}{x}$

8 Quelques problèmes du second degré

8.1 Problème de résistance équivalente

Dans un circuit électrique, des résistances ont été montées comme l'indique la figure ci-dessous. Déterminer la valeur de la résistance x pour que la résistance équivalente de l'ensemble soit de 6Ω .



On rappelle que la résistance équivalente dans un circuit

- en série est la somme des résistances : $R_{eq} = R_1 + R_2$
- en parallèle est telle que : $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Le circuit est composé de deux parties, une partie en parallèle et l'autre en série.

$$\text{Dans la partie en parallèle : } \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{x+4}{4x}$$

$$\text{en prenant l'inverse : } R_{eq} = \frac{4x}{x+4}$$

$$\text{La résistance équivalente de l'ensemble est donc : } \frac{4x}{x+4} + x = 6$$

en multipliant par $(x+4)$, on a :

$$4x + x(x+4) = 6(x+4) \Leftrightarrow 4x + x^2 + 4x = 6x + 24 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

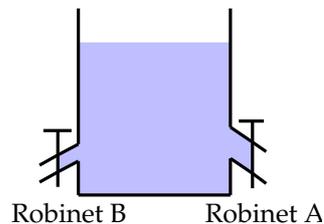
$$\text{On calcule le discriminant : } \Delta = 4 + 4 \times 24 = 100 = 10^2$$

$$\text{On obtient deux solutions : } x_1 = \frac{-2+10}{2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2-10}{2} = -6$$

On ne retient que la solution positive. La valeur de la résistance est donc de 4Ω

8.2 Un problème de robinet

Un robinet B met 40 min de plus qu'un robinet A pour vider un réservoir. Lorsqu'on ouvre simultanément les deux robinets le réservoir est vidé en 48 min. Quel temps faut-il à chacun pour vider le réservoir ?



La notion physique est le débit de vidange d'un réservoir.

Le débit d représente le volume écoulé par unité de temps : $d = \frac{V}{t}$

On suppose que la vidange du réservoir se fait à débit constant. De plus le débit avec les deux robinets ouverts est égal à la somme des débits des robinets A et B.

On pose :

t_A : temps de vidange en minutes avec le robinet A

t_B : temps de vidange en minutes avec le robinet B

t_T : temps de vidange en minutes avec les robinets A et B.

V : volume du réservoir

$$\text{On a donc : } \frac{V}{t_T} = \frac{V}{t_A} + \frac{V}{t_B} \quad (1)$$

Comme le robinet B a un temps de vidange de 40 min supérieur à celui de A :

On a : $t_B = t_A + 40$ (2)

En remplaçant l'égalité (2) dans l'égalité (1), on a : $\frac{V}{48} = \frac{V}{t_A} + \frac{V}{t_A + 40}$

En divisant par V et en multipliant par $48 t_A(t_A + 40)$, on a :

$$t_A(t_A + 40) = 48(t_A + 40) + 48t_A \Leftrightarrow t_A^2 + 40t_A = 48t_A + 1920 + 48t_A$$

On obtient alors l'équation : $t_A^2 - 56t_A - 1920 = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = 56^2 + 4 \times 1920 = 10\,816 = 104^2$

On prend la racine positive de l'équation :

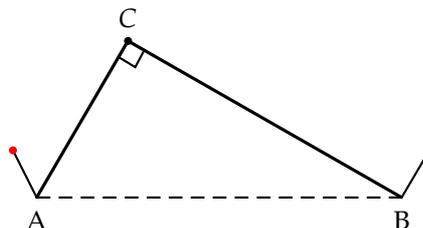
$$t_A = \frac{56 + 104}{2} = 80 \quad \text{donc} \quad t_B = 80 + 40 = 120$$

Conclusion : le temps de vidange du robinet A est de 80 min soit 1h20 et celui du robinet B est de 120 min soit 2h.

8.3 Une histoire de ficelle

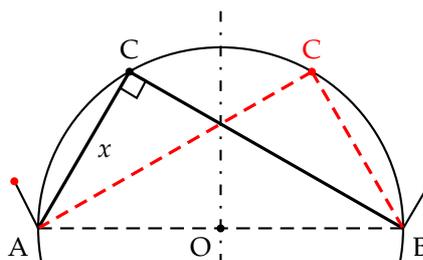
Une ficelle longue de 89 cm est fixée à ses extrémités par deux clous A et B distants de 65 cm.

- Est-il possible de tendre la ficelle de manière à ce que le triangle ABC soit rectangle en C ?
- Quelle doit être la longueur maximale de la ficelle pour que le problème soit possible ?



- Pour que le triangle ABC soit rectangle en C, il faut que le point C soit sur le cercle de diamètre [AB].

Du fait de la symétrie du problème, si le point C existe, il en existe un deuxième C' symétrique du premier par rapport à l'axe passant par le milieu de [AB] et perpendiculaire à (AB).



On pose $x = AC$, comme la longueur de ficelle est de 89 cm, on a alors $BC = 89 - x$

Comme $AB = 65$, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}x^2 + (89 - x)^2 &= 65^2 \\x^2 + 89^2 - 89 \times 2x + x^2 &= 65^2 \\2x^2 - 89 \times 2x + 89^2 - 65^2 &= 0 \\2x^2 - 89 \times 2x + (89 - 65)(89 + 65) &= 0 \\2x^2 - 89 \times 2x + 24 \times 154 &= 0 \\x^2 - 89x + 12 \times 154 &= 0 \\x^2 - 89x + 1848 &= 0\end{aligned}$$

On calcule le discriminant $\Delta = 89^2 - 4 \times 1848 = 529 = 23^2$

On obtient les deux solutions correspondant aux points C et C' :

$$x_1 = \frac{89 + 23}{2} = 56 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{89 - 23}{2} = 33$$

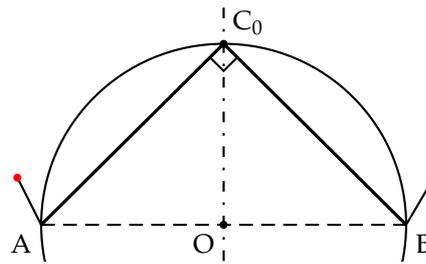
- b) La situation limite correspond à la configuration où les points C et C' sont confondus.

On appelle ℓ la longueur maximale de la ficelle.

Le triangle ACB est alors un triangle rectangle isocèle.

$$\text{On a alors } AB^2 = 2 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{\ell^2}{2}$$

On en déduit alors $\ell = 65\sqrt{2}$



Vérifions ce résultat par le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned}x^2 + (\ell - x)^2 &= 65^2 \\x^2 + \ell^2 + 2\ell x + x^2 - 65^2 &= 0 \\2x^2 + 2\ell x + \ell^2 - 65^2 &= 0\end{aligned}$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 4\ell^2 - 8(\ell^2 - 65^2) = 4\ell^2 - 8\ell^2 + 8 \times 65^2 = -4\ell^2 + 8 \times 65^2 = 4(-\ell^2 + 2 \times 65^2)$$

Pour que ce système admette des solutions, on doit avoir $\Delta \geq 0$, on a alors :

$$-\ell^2 + 2 \times 65^2 \geq 0 \Leftrightarrow \ell^2 - 2 \times 65^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\ell - 65\sqrt{2})(\ell + 65\sqrt{2}) \leq 0$$

Les racines sont donc $\ell_1 = 65\sqrt{2}$ et $\ell_2 = -65\sqrt{2}$

Comme le coefficient devant ℓ^2 est positif, on en déduit que les valeurs possibles sont à l'intérieur des racines. Comme $\ell > 65$, on en déduit que le problème admet une solution si :

$$65 < \ell \leq 65\sqrt{2}$$

La valeur limite de ℓ est donc $65\sqrt{2} \simeq 91,92$